



# Cascades d'énergie et turbulence d'ondes dans une expérience de turbulence en rotation

Antoine Campagne

## ► To cite this version:

Antoine Campagne. Cascades d'énergie et turbulence d'ondes dans une expérience de turbulence en rotation. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Université Paris Sud - Paris XI, 2015. Français. NNT : 2015PA112116 . tel-01189585

**HAL Id: tel-01189585**

**<https://theses.hal.science/tel-01189585>**

Submitted on 1 Sep 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# UNIVERSITÉ PARIS-SUD

LABORATOIRE : FLUIDES, AUTOMATIQUE ET SYSTÈMES THERMIQUES

ÉCOLE DOCTORALE : MODÉLISATION ET INSTRUMENTATION EN PHYSIQUE,  
ÉNERGIES, GÉOSCIENCES ET ENVIRONNEMENT

DISCIPLINE : PHYSIQUE

## THÈSE DE DOCTORAT

Soutenue le jeudi 9 juillet 2015

**Antoine Campagne**

---

# Cascades d'énergie et turbulence d'ondes dans une expérience de turbulence en rotation

---

### Composition du jury :

Directeur de thèse :	Pierre-Philippe Cortet	CR CNRS, Université Paris-Sud (FAST)
Co-directeur de thèse :	Frédéric Moisy	Professeur, Université Paris-Sud (FAST)
Rapporteurs :	Fabien Godeferd Nicolas Mordant	DR CNRS, École Centrale de Lyon (LMFA) Professeur, Université Joseph-Fourier (LEGI)
Examineurs :	Paul Billant Sébastien Galtier J. Christos Vassilicos	CR CNRS, École polytechnique, (LadHyX) Professeur, Université Paris-Sud (LPP) Professeur, Imperial College London (Dept. of Aeronautics)

---

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
1.1	La turbulence homogène . . . . .	3
1.1.1	Équation de Kármán-Howarth-Monin (KHM) . . . . .	4
1.1.2	Turbulence 3D isotrope . . . . .	5
1.1.3	Turbulence 2D isotrope . . . . .	6
1.1.4	Injection d'énergie . . . . .	8
1.2	Écoulements en rotation et équations de la dynamique . . . . .	8
1.3	Écoulements dominés par la rotation . . . . .	10
1.3.1	Théorème de Taylor-Proudman $Ro = 0$ , $\sigma_* \rightarrow 0$ . . . . .	10
1.3.2	Ondes d'inertie $Ro = 0$ , $\sigma_* \leq 1$ . . . . .	10
1.3.3	Turbulence faiblement non-linéaire $Ro \rightarrow 0$ , $\sigma_* \leq 1$ . . . . .	11
1.4	Turbulence en rotation modérée . . . . .	15
1.4.1	Anisotropie de la turbulence en rotation . . . . .	15
1.4.2	Écoulements 2D en rotation . . . . .	15
1.4.3	Transferts horizontaux d'énergie en turbulence en rotation . . . . .	17
1.4.4	Turbulence en rotation et ondes d'inertie . . . . .	19
1.4.5	Importance du confinement vertical et des propriétés du forçage . . . . .	21
1.5	Plan du manuscrit . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Dispositif expérimental et caractérisation basique de l'écoulement</b>	<b>25</b>
2.1	Présentation générale du dispositif expérimental . . . . .	25
2.2	Générateurs de dipôles de tourbillons . . . . .	28
2.3	Mesure des champs de vitesse . . . . .	28
2.3.1	Principe de la vélocimétrie par images de particules (PIV) . . . . .	30
2.3.2	Vélocimétrie stéréoscopique par images de particules (SPIV) . . . . .	30
2.3.3	Matériel utilisé et séries de mesure . . . . .	31
2.4	Caractérisation de l'écoulement . . . . .	33
2.4.1	Champs de vitesse typiques . . . . .	34
2.4.2	Variations temporelles de la vitesse . . . . .	37
2.4.3	Taux de turbulence . . . . .	37
2.4.4	Homogénéité . . . . .	39
2.4.5	Nombres sans dimension . . . . .	40
2.4.6	Componentalité . . . . .	41
2.4.7	Asymétrie cyclone/anticyclone . . . . .	41



<b>3</b>	<b>Distribution et transferts d'énergie entre échelles</b>	<b>45</b>
3.1	Introduction . . . . .	45
3.2	Distribution d'énergie entre échelles . . . . .	46
3.2.1	Incréments de vitesse et moyenne spatiale . . . . .	47
3.2.2	Moment d'ordre deux des incréments de vitesse . . . . .	48
3.2.3	Corrélations de vitesse en deux points et échelles intégrales . . . . .	53
3.3	Transferts d'énergie entre échelles . . . . .	57
3.3.1	Équation de Kármán-Howarth-Monin . . . . .	57
3.3.2	Transferts horizontaux d'énergie entre échelles . . . . .	58
3.3.3	Transferts horizontaux de l'énergie horizontale et verticale . . . . .	60
3.4	Bilan d'énergie échelle à échelle et forçage inhomogène . . . . .	62
3.4.1	Équation de Kármán-Howarth-Monin inhomogène (KHM <sub>i</sub> ) . . . . .	62
3.4.2	Turbulence faiblement inhomogène . . . . .	64
3.4.3	Estimation des termes de l'équation de KHM <sub>i</sub> . . . . .	66
3.4.4	Bilan d'énergie dans le plan horizontal . . . . .	67
3.4.5	Bilan d'énergie horizontale/verticale sous l'hypothèse d'un écoulement 2D . . . . .	71
3.4.6	Dissipation à grande échelle . . . . .	77
3.4.7	Modes 2D et 3D . . . . .	78
3.5	Conclusion . . . . .	80
<b>4</b>	<b>Structures spatio-temporelles et ondes d'inertie</b>	<b>83</b>
4.1	Introduction . . . . .	83
4.2	Analyse temporelle . . . . .	84
4.2.1	Temps caractéristiques . . . . .	84
4.2.2	Spectre temporel . . . . .	86
4.2.3	Anisotropie componentielle . . . . .	88
4.3	Analyse spatio-temporelle . . . . .	91
4.3.1	Distribution spatio-temporelle de l'énergie . . . . .	91
4.3.2	Anisotropie dimensionnelle . . . . .	92
4.3.3	Effets de la viscosité et de balayage stochastique . . . . .	99
4.4	Conclusion . . . . .	102
<b>5</b>	<b>Dissipation d'énergie en turbulence en rotation</b>	<b>105</b>
5.1	Introduction . . . . .	105
5.2	Dispositif expérimental . . . . .	109
5.3	Résultats préliminaires . . . . .	112
5.3.1	Puissance dissipée sans rotation d'ensemble $\Omega = 0$ . . . . .	112
5.3.2	Puissance dissipée en présence d'une rotation d'ensemble . . . . .	113
5.4	Conclusion . . . . .	116
<b>6</b>	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>117</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>123</b>

# Remerciements

Je voudrais tout d’abord remercier Pierre Augier, Jean-Marc Chomaz et Paul Billant de nous avoir prêté les générateurs qui ont permis d’obtenir une grande partie des résultats obtenus dans cette thèse.

Je tiens à remercier chaleureusement Pierre et Fred pour tout ce que vous m’avez appris durant ces trois dernières années et pour tellement d’autres raisons. Je vous suis énormément reconnaissant pour votre patience et votre disponibilité tout au long de ma thèse. Je pense notamment au nombre incalculable de répétitions orales, ou encore des nombreuses corrections de mon manuscrit rendues avec une rapidité qui faisait parfois peur. Cette réactivité met parfois une grosse pression sur les épaules, mais le résultat final en vaut toujours la peine. Je souhaite remercier également Basile, collègue et co-bureau à l’humour détonant mais aussi un redoutable “auto-referee”. Je remercie Alban, Christian, Lionel et Rafaël sans qui aucune expérience n’aurait pu tourner rond.

Je voudrais exprimer ma gratitude aux membres du jury pour avoir accepté de juger mon travail, en particulier Fabien Godeferd et Nicolas Mordant qui ont eu la lourde tâche de rapporteur.

Je remercie également Georges Gauthier, Patrice Hello, Wietze Herreman, Cyprien Morize et Stéphanie Pellerin de m’avoir fait confiance et de m’avoir donné l’opportunité d’enseigner durant mon monitorat.

J’ai eu le très grand plaisir de partager de nombreux bons moments (la liste est trop longue à énumérer) avec différents membres du labo, au labo ou en dehors, je leur en remercie. Je voudrais aussi remercier les permanents et non permanents de la coloc qui sont devenus pour la plupart des amis et sans qui les soirées et les week-end à Orsay auraient été très longs, merci d’avoir partagé votre folie et bien plus encore. Je remercie les potes de la région mais aussi tous ceux, qui malgré l’éloignement plus ou moins important, ont toujours répondu présent quand il le fallait.

Merci Christophe pour tout ce que tu as fait. Enfin, merci frerot d’avoir fait la route pour

## TABLE DES MATIÈRES

---

ma soutenance, j'espère que ça t'as un peu inspiré.

# Chapitre 1

## Introduction générale

L'objectif de cette thèse de doctorat est d'apporter une contribution à la compréhension de la turbulence soumise à une rotation d'ensemble. Cette étude peut se placer dans le contexte des écoulements géophysiques et astrophysiques. La turbulence, qui règne dans la plupart de ces écoulements, joue le plus souvent un rôle central : diffusion de chaleur ou de polluants, dissipation d'énergie... Le fluide est généralement soumis à une rotation d'ensemble et est également fortement stratifié en densité, cette stratification provenant par exemple, dans les océans, de gradients de température et de salinité. Dans certains cas, lorsque le fluide est conducteur de l'électricité, sa dynamique peut aussi se coupler à celle d'un champ magnétique : c'est l'objet d'étude de la magnétohydrodynamique.

Une conséquence commune à ces trois ingrédients physique est la possibilité de propager des ondes internes : les ondes d'inertie pour les fluides en rotation, les ondes de gravité pour les fluides stratifiés et les ondes d'Alfvén pour les fluides conducteurs [1]. Ces ondes et les structures cohérentes usuelles de la turbulence peuvent ainsi coexister et interagir, le plus souvent de manière forte. Au sein de la turbulence, ces ondes sont capables de propager efficacement l'énergie sur de longues distances, ce qui a pour effet dans certains cas de redistribuer spatialement l'énergie, ou au contraire de la focaliser (attracteurs). Ces ondes peuvent également être source de turbulence à travers leurs instabilités. De par la richesse des mécanismes physiques à l'œuvre dans ce type d'écoulements, la compréhension de leur dynamique constitue un véritable défi.

Dans cette thèse, nous nous focalisons sur la compréhension de la dynamique des écoulements en rotation, c'est-à-dire de l'influence de la force de Coriolis sur ces écoulements. L'importance de la rotation au sein d'un écoulement peut être estimée en première approche par le nombre de Rossby  $Ro = U/\Omega L$  basé sur les grandeurs caractéristiques de l'écoulement, i.e. une vitesse  $U$  et une longueur  $L$  et sur taux de rotation d'ensemble  $\Omega$ . Ce nombre compare l'amplitude des non-linéarités (responsables de la turbulence) à la force de Coriolis : un petit nombre de Rossby indique que l'écoulement est fortement influencé par la rotation. Dans la plupart des écoulements naturels où la rotation est à l'œuvre, les nombres de Rossby rencontrés sont en pratique seulement modérément faibles : par exemple de l'ordre de 0.01 à 0.1 pour les grandes structures océaniques et atmosphériques terrestres ainsi que pour la tâche rouge de Jupiter

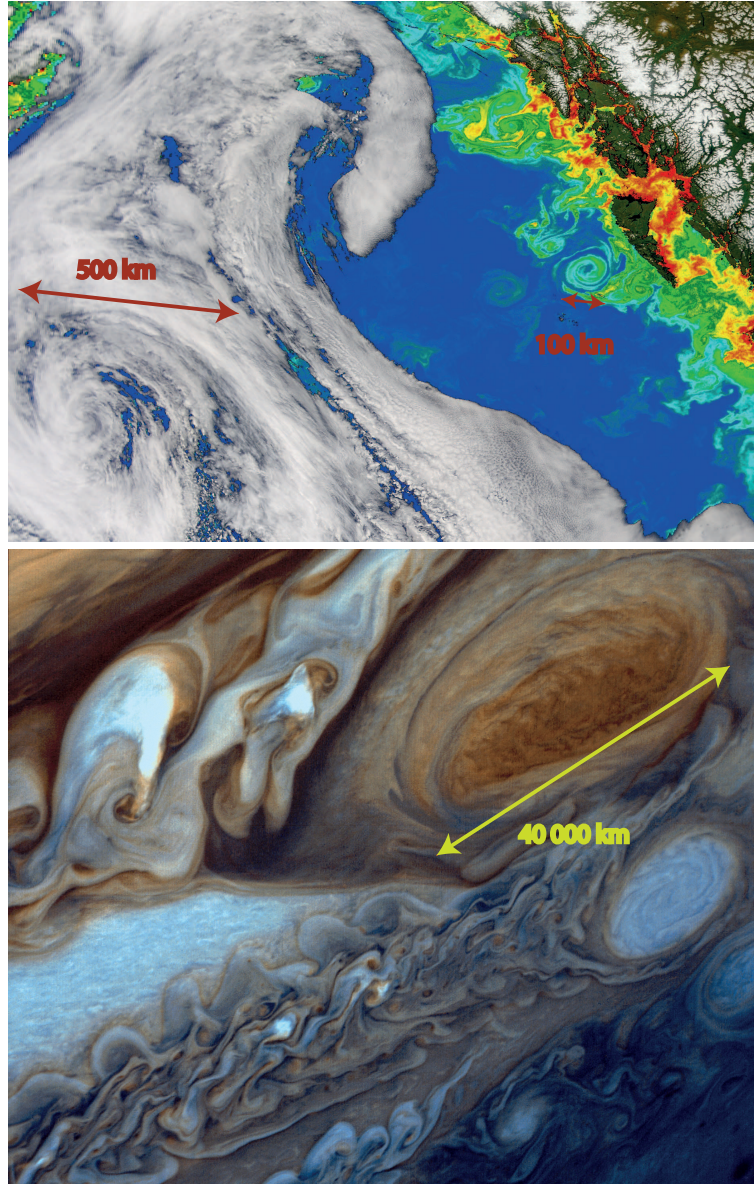


FIGURE 1.1 – En haut : image satellite du golfe d’Alaska. En bas à gauche de l’image on observe une large structure tourbillonnaire atmosphérique visible par la présence de vapeur d’eau dans les nuages. On remarque également la présence de larges structures océaniques visibles en fausses couleurs à proximité des côtes du Canada. La couleur reflète la concentration de chlorophylle qui constitue le pigment principal des phytoplanctons. Source : NASA/Goddard Space Flight Center et Orbimage. En bas : vue prise par la sonde Voyager 1 de la tâche rouge de Jupiter. Source : NASA/JPL.

(figure 1.1), situation qui correspond à un fort couplage entre la rotation et les non-linéarités.

Dans ce chapitre introductif, nous rappelons les connaissances sur lesquelles s'appuient ces travaux de thèse. Les grandes lignes des propriétés statistiques de la turbulence 3D et 2D homogène et isotrope y seront tout d'abord décrites. Nous établirons ensuite une liste non exhaustive des effets connus de la force de Coriolis sur les propriétés statistiques de la turbulence.

### 1.1 La turbulence homogène

Nous nous intéressons dans un premier temps à la dynamique des fluides en l'absence de rotation et plus particulièrement dans un régime turbulent. On considère un fluide newtonien de masse volumique  $\rho$  et de viscosité cinématique  $\nu$  dont l'évolution du champ de vitesse Eulérien  $\mathbf{u}$  est régie par l'équation de Navier-Stokes

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (1.1)$$

avec  $p$  la pression. À l'équation (1.1) s'ajoutent la condition d'incompressibilité du fluide

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1.2)$$

et les conditions aux limites du problème. Cette équation fait apparaître deux termes qui pilotent la dynamique du champ de vitesse  $\mathbf{u}$  : le terme non-linéaire d'advection  $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$  et le terme de diffusion visqueuse  $\nu \nabla^2 \mathbf{u}$ . Considérons un forçage qui engendre une vitesse typique  $U_f$  à une échelle spatiale  $L_f$ . L'importance relative des processus non-linéaires et visqueux peut être évaluée par le nombre de Reynolds associé au forçage  $Re_f = U_f L_f / \nu \sim |(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}| / |\nu \nabla^2 \mathbf{u}|$ . Pour un petit nombre de Reynolds  $Re_f \ll 1$ , la dynamique est dominée par les effets linéaires visqueux et l'écoulement est laminaire. En revanche, à grand nombre de Reynolds  $Re_f \gg 1$ , la dynamique de l'écoulement est dominée par les effets non-linéaires. L'écoulement est alors turbulent et se compose d'un ensemble complexe de structures (tourbillons, couches de cisaillement ...) d'échelles distribuées sur un large continuum et qui évoluent de manière chaotique. L'objectif de cette section est de rappeler les propriétés statistiques importantes de tels écoulements turbulents.

Dans la vision communément admise de la turbulence 3D homogène et isotrope, il existe une gamme d'échelles dominées par les effets non-linéaires, appelée gamme inertielle, où l'énergie est transférée de proche en proche de la plus grande échelle de l'écoulement  $L_f$  vers les petites échelles à un taux de transfert  $\Pi$  indépendant de l'échelle : c'est la cascade de Richardson [2, 3]. Considérons à présent une échelle  $r$  comprise dans cette gamme et donc associée à un nombre de Reynolds élevé  $Re_r = U_r r / \nu \gg 1$ , avec  $U_r$  la vitesse associée à cette échelle. Son évolution temporelle est dans ce cas dominée par les interactions non-linéaires avec les autres échelles à travers le terme  $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ . Le temps caractéristique sur lequel évolue  $U_r$  est de l'ordre de grandeur du temps non-linéaire  $\tau_{r,nl} \sim r / U_r$ . On en déduit que le taux de transfert d'énergie à travers l'échelle  $r$  évoqué plus haut est de l'ordre de  $\Pi_r \sim U_r^2 / \tau_{r,nl} \sim U_r^3 / r$ . De par la conservation du flux d'énergie dans la cascade, on a l'égalité  $\Pi_r = \Pi$  tant que  $Re_r \gg 1$ , c'est-à-dire tant

que la dissipation visqueuse est négligeable. Le nombre de Reynolds associé à une échelle  $r$  de la cascade vérifie donc  $Re_r = \Pi^{1/3} r^{4/3} / \nu$  et décroît quand l'échelle  $r$  diminue. La cascade s'arrête à l'échelle de Kolmogorov  $\eta$  pour laquelle les effets visqueux deviennent significatifs, soit  $Re_\eta = \Pi^{1/3} \eta^{4/3} / \nu \sim 1$ . L'énergie est alors dissipée par la viscosité à un taux  $\varepsilon$  imposé par le taux de transfert  $\Pi$  de la cascade d'énergie, ce dernier étant lui même fixé par les instabilités à la plus grande échelle  $L_f$ , de sorte que

$$\varepsilon \sim \Pi \sim \Pi_{L_f} \sim U_f^3 / L_f. \quad (1.3)$$

À partir de l'expression du nombre de Reynolds dans la gamme inertielle et de la conservation du flux d'énergie, il vient directement que  $\eta / L_f = Re_f^{-3/4}$ , ce qui indique que la séparation entre l'échelle de forçage et l'échelle de Kolmogorov est d'autant plus grande que le nombre de Reynolds associé au forçage  $Re_f$  est grand.

La suite de cette section sera centrée sur l'introduction des outils statistiques nécessaires à une description en échelles des mécanismes physiques en jeu dans les écoulements turbulents. Cette description s'appuiera sur l'équation de Kármán-Howarth-Monin à partir de laquelle nous retrouverons les résultats classiques de la turbulence 3D et 2D.

### 1.1.1 Équation de Kármán-Howarth-Monin (KHM)

L'un des outils centraux de la description statistique en échelle de la turbulence est l'incrément de vitesse

$$\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \quad (1.4)$$

Son moment d'ordre 2,  $E(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t) = \langle (\delta \mathbf{u})^2 \rangle$ , avec  $\langle \cdot \rangle$  désignant une moyenne d'ensemble, est notamment au cœur de la plupart des études théoriques de la turbulence car il renseigne sur la distribution de l'énergie dans l'espace des échelles  $\mathbf{r}$ . Pour une turbulence homogène, c'est à dire de statistique invariante avec la position  $\mathbf{x}$ , mais pas nécessairement isotrope, l'évolution de  $E$  est régie par l'équation de Kármán-Howarth-Monin (KHM) [3, 4]

$$\partial_t E(\mathbf{r}, t) = -4\Pi - 4\left(\varepsilon - \frac{\nu}{2} \nabla_{\mathbf{r}}^2 E\right) + 4\Phi_{inj}, \quad (1.5)$$

avec

$$\Pi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4} \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \langle (\delta \mathbf{u})^2 \delta \mathbf{u} \rangle, \quad (1.6)$$

$$\Phi_{inj}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \langle \delta \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{f} \rangle, \quad (1.7)$$

$$\varepsilon(t) = \frac{\nu}{2} \langle (\partial_i u_j + \partial_j u_i)^2 \rangle, \quad (1.8)$$

où  $\mathbf{f}$  désigne une force par unité de masse appliquée au fluide et  $\nabla_{\mathbf{r}}$  la divergence par rapport à l'incrément  $\mathbf{r}$ . Le terme  $\varepsilon$  est le taux moyen de dissipation d'énergie cinétique par unité de



## 1.1. LA TURBULENCE HOMOGENE

---

masse. L'équation de KHM se dérive de manière exacte à partir de l'équation de Navier-Stokes. Les étapes de sa démonstration seront rappelées au chapitre 3. L'équation (1.5) exprime la conservation de  $E$  dans l'espace des échelles  $\mathbf{r}$ . Pour une turbulence isotrope,  $E$  s'interprète [2] comme l'énergie cumulée des échelles inférieures à  $r = |\mathbf{r}|$  à laquelle s'ajoute  $r^2$ -fois le carré moyen de la vorticité (enstrophie) associée aux échelles plus grandes que  $r$ . Cette dernière contribution est toutefois négligeable aux échelles grandes devant l'échelle où la dissipation visqueuse a lieu. Les différents termes de droite de l'équation de KHM peuvent alors recevoir les interprétations suivantes :

- le terme  $\Pi$  représente le transfert d'énergie des échelles inférieures à  $r$  aux échelles supérieures. Il fournit donc une mesure quantitative des transferts d'énergie à l'intérieur de la cascade évoquée plus tôt.
- le terme visqueux  $\varepsilon - \frac{\nu}{2} \nabla_{\mathbf{r}}^2 E$  représente la puissance dissipée aux échelles inférieures à  $r$ . On a  $\varepsilon - \frac{\nu}{2} \nabla_{\mathbf{r}}^2 E \simeq 0$  pour  $r \ll \eta$  (démontrable à l'aide d'un développement limité de  $E$  en  $r/\eta \ll 1$ ) et  $\varepsilon - \frac{\nu}{2} \nabla_{\mathbf{r}}^2 E \simeq \varepsilon$ , pour  $r \gg \eta$  où  $\eta$  est l'échelle de dissipation d'énergie.
- le terme  $\Phi_{inj}$  représente la puissance injectée aux échelles inférieures à  $r$ . On a  $\Phi_{inj} \simeq 0$  pour  $r \ll L_f$ , et  $\Phi_{inj} \simeq P = \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} \rangle$  pour  $r \gg L_f$  où  $L_f$  est l'échelle d'injection d'énergie.

Cette équation constituera la base de l'analyse en échelle abordée au chapitre 3.

### 1.1.2 Turbulence 3D isotrope

Dans cette section, nous décrivons la cascade de Richardson en nous appuyant cette fois sur l'équation de KHM. Pour une turbulence 3D homogène, isotrope et stationnaire, telle que les quantités statistiques ne dépendent plus que de la norme de l'échelle  $|\mathbf{r}|$ , le scénario, schématisé à la figure 1.2, est bien établi : l'énergie est injectée à une puissance  $P$    l'échelle  $L_f$  associée à un grand nombre de Reynolds  $Re_f$  telle que  $\Phi_{inj}(r < L_f) \simeq 0$  et  $\Phi_{inj}(r > L_f) \simeq P$  et elle cascade vers les petites échelles. Cette cascade s'arrête à l'échelle de Kolmogorov  $\eta$  associée à un nombre de Reynolds d'ordre 1 pour laquelle les effets de la viscosité deviennent importants ( $\frac{\nu}{2} \nabla_{\mathbf{r}}^2 E = \varepsilon$ ). Si le nombre de Reynolds associé au forçage est très grand, il existe une gamme d'échelles  $\eta \ll r \ll L_f$  où  $\frac{\nu}{2} \nabla_{\mathbf{r}}^2 E \simeq 0$  et  $\Phi_{inj} \simeq 0$  (figure 1.2). Dans cette gamme dite inertielle, l'équation de KHM se simplifie en

$$\Pi(r) = -\varepsilon. \quad (1.9)$$

Cette égalité indique que l'énergie est transférée vers les petites échelles ( $\Pi$  est négatif)   un flux indépendant de l'échelle et égal à  $\varepsilon$ . En intégrant (1.9) avec l'hypothèse d'isotropie, on obtient la célèbre loi des 4/5 me de Kolmogorov [5]

$$\langle \delta u_l^3 \rangle = -\frac{4}{5} \varepsilon r, \quad (1.10)$$

avec  $\delta u_l = \delta \mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$  l'incrément longitudinal de vitesse. Cette loi a été vérifiée de nombreuses fois numériquement [6] et expérimentalement [7, 8] dans des écoulements à grand nombre de Reynolds.



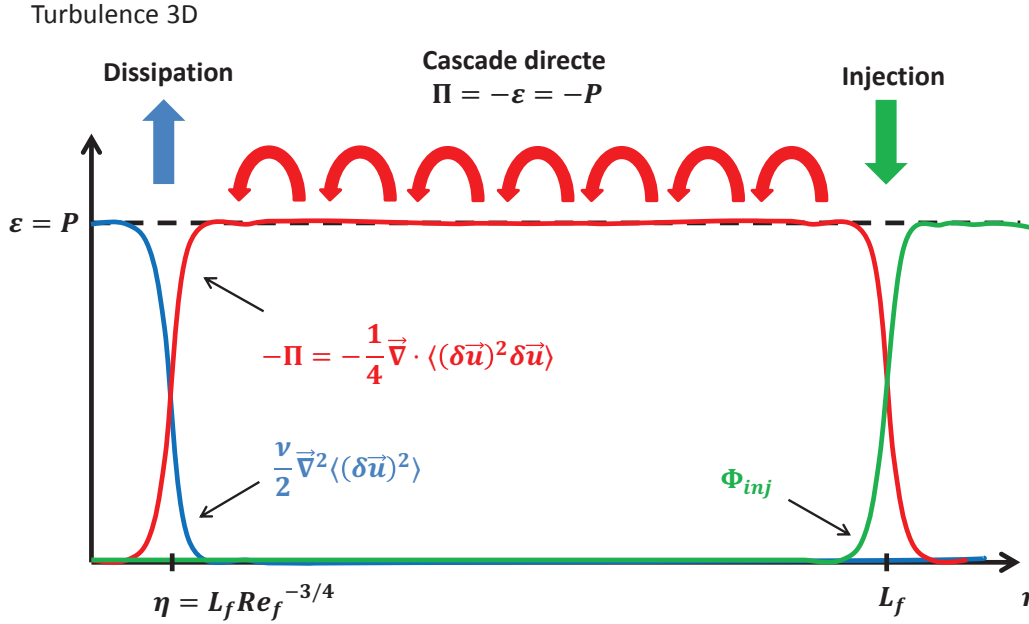


FIGURE 1.2 – Représentation schématique des termes de KHM pour une turbulence 3D forcée à l'échelle  $L_f$ .

À partir de la relation (1.10), on prédit par analyse dimensionnelle la loi de Kolmogorov pour le moment d'ordre 2 des incréments longitudinaux de vitesse [5]

$$\langle \delta u_l^2 \rangle = C_r (|\Pi| r)^{2/3} = C_r (\varepsilon r)^{2/3}, \quad (1.11)$$

avec  $C_r$  la constante universelle de Kolmogorov évaluée expérimentalement à 2.0. L'équivalent de la relation (1.11) dans l'espace spectral est la célèbre loi des  $-5/3$  qui prédit le comportement du spectre spatial unidimensionnel d'énergie  $e(k)$

$$e(k) = C_k \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}. \quad (1.12)$$

Cette loi a reçu un grand nombre de vérifications expérimentales depuis les années 60 [9], ce qui a permis d'évaluer la constante universelle  $C_k$  à environ 1.5. Elle constitue une des caractéristiques les plus robustes de la turbulence 3D homogène et isotrope.

### 1.1.3 Turbulence 2D isotrope

On s'intéresse à présent au cas de la turbulence 2D homogène, isotrope et forcée de manière stationnaire qui diffère fortement de la turbulence 3D. Le mécanisme d'étirement tourbillonnaire, qui est souvent évoqué comme l'origine de la cascade directe en turbulence 3D, est inexistant en turbulence 2D du fait de la perpendicularité entre la vorticité et le gradient de vitesse.

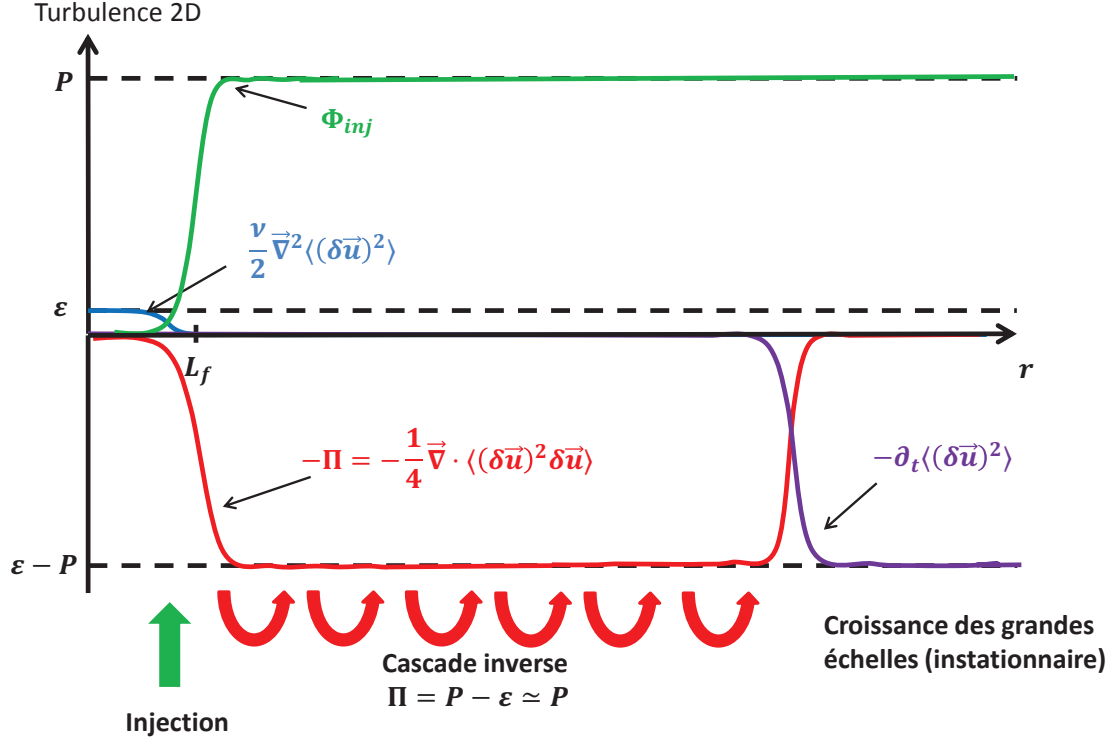


FIGURE 1.3 – Représentation schématique des termes de KHM pour une turbulence 2D forcée à l'échelle  $L_f$ .

L'enstrophie (carré moyen de la vorticité) est alors, comme l'énergie cinétique, une quantité conservée dans la limite inviscide  $\nu \rightarrow 0$ . La conservation de ces deux quantités impose une cascade inverse d'énergie, c'est-à-dire un transfert des petites vers les grandes échelles (Kraichnan (1967) [10]). Ces grandes échelles étant associées à de faibles gradients spatiaux de vitesse, il en résulte un taux de dissipation d'énergie  $\varepsilon$  très faible devant l'injection d'énergie  $P$ . Dans un milieu infini et sans aucun mécanisme dissipatif supplémentaire à grande échelle, la cascade ne s'arrête alors jamais et forme des structures de plus en plus grandes. La distribution d'énergie est dans ce cas instationnaire aux plus grandes échelles avec  $\partial_t E \neq 0$  (figure 1.3). Il est à noter que dans les écoulements réels, la cascade est en pratique stoppée par les effets de friction liés au confinement vertical ou plus simplement lorsqu'elle atteint la plus grande échelle horizontale du système. Aux échelles grandes devant l'échelle d'injection  $L_f$  pour lesquelles  $\Phi_{inj} \simeq P$  et petites devant la plus grande échelle de l'écoulement telles que  $\partial_t E \simeq 0$ , l'équation de KHM se simplifie en

$$\Pi(r) = P - \varepsilon \simeq P. \quad (1.13)$$

Le flux d'énergie entre échelles  $\Pi$  est ici positif, ce qui indique que l'énergie est transférée vers les grandes échelles. En intégrant cette équation avec l'hypothèse d'isotropie on obtient l'équivalent en turbulence 2D de la loi des  $4/5^{\text{ème}}$  de Kolmogorov [11–13]

$$\langle \delta u_l^3 \rangle = \frac{3}{2} P r. \quad (1.14)$$

Il est à noter enfin que le spectre spatial d'énergie  $e(k)$  dans la gamme inertielle de la turbulence 2D est le même que celui de la turbulence 3D, les mêmes hypothèses produisant les mêmes prédictions,

$$e(k) = C'_k |\Pi|^{2/3} k^{-5/3} = C'_k P^{2/3} k^{-5/3}, \quad (1.15)$$

avec  $C'_k$  une constante d'ordre 1. Cette loi a été vérifiée de nombreuses fois aussi bien numériquement qu'expérimentalement (voir l'article de revue de Tabeling [14]).

### 1.1.4 Injection d'énergie

Il est important de noter que la force massique  $\mathbf{f}$  utilisée pour rendre compte de l'injection d'énergie  $\Phi_{inj}$  dans l'équation de KHM est nulle dans la plupart des expériences et dans la plupart des écoulements naturels. Ce terme d'injection est en fait considéré dans les approches théoriques et dans les simulations numériques afin de maintenir l'écoulement turbulent dans un état statistiquement stationnaire et homogène. Dans la nature ou dans les expériences, les écoulements sont générés par exemple via les conditions aux limites (mouvement fluides ou solides) ou des gradients de densité du fluide qui engendrent de la convection. L'injection d'énergie dans un volume de contrôle donné est alors assurée par un transport spatial d'énergie qui est intrinsèquement associé aux inhomogénéités de la statistique de la turbulence. Nous discuterons ce point plus en détail au chapitre 3 où nous nous pencherons sur la généralisation de l'équation de KHM au cas inhomogène développée par Hill [15], ce qui nous permettra de quantifier notre injection d'énergie.

## 1.2 Écoulements en rotation et équations de la dynamique

Nous nous concentrons à présent sur la dynamique des fluides en rotation. Nous présentons tout d'abord les équations qui régissent ces écoulements à partir desquelles nous dégagerons différents régimes limites. On considère à présent un fluide newtonien de masse volumique  $\rho$  et de viscosité cinématique  $\nu$  soumis à une rotation d'ensemble  $\mathbf{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_z$ . L'évolution de son champ de vitesse Eulérien  $\mathbf{u}$  dans le référentiel en rotation est régie par l'équation de Navier-Stokes (1.1), à laquelle on ajoute la force de Coriolis

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - 2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1.16)$$

## 1.2. ÉCOULEMENTS EN ROTATION ET ÉQUATIONS DE LA DYNAMIQUE

---

où  $p$  désigne la pression corrigée par la pression centrifuge. Cette équation peut se réécrire sous une forme adimensionnée

$$\sigma_* \partial_{t^*} \mathbf{u}^* + Ro (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* = -\nabla^* p^* - \mathbf{e}_z \times \mathbf{u}^* + Ro Re^{-1} \nabla^{*2} \mathbf{u}^* \quad (1.17)$$

avec  $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}/U$ ,  $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}/L$  et  $t^* = \sigma t$ .<sup>1</sup> Nous faisons intervenir ici des grandeurs caractéristiques de l'écoulement que l'on essaie de choisir de manière pertinente, une vitesse  $U$ , une longueur  $L$  et un taux d'évolution  $\sigma$ . Cet adimensionnement fait apparaître trois nombres sans dimension :

1. le nombre de Reynolds  $Re = \frac{UL}{\nu} \simeq \frac{|\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}|}{|\nu \nabla^2 \mathbf{u}|}$  qui compare le terme non-linéaire au terme visqueux,
2. le nombre de Rossby  $Ro = \frac{U}{2\Omega L} \simeq \frac{|\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}|}{|2\Omega \times \mathbf{u}|}$  qui compare le terme non-linéaire à la force de Coriolis,
3. la fréquence temporelle adimensionnée  $\sigma_* = \frac{\sigma}{2\Omega} \simeq \frac{|\partial_t \mathbf{u}|}{|2\Omega \times \mathbf{u}|}$  qui compare le taux d'évolution du champ de vitesse à la fréquence de Coriolis.

Nous distinguerons dans la suite quatre régimes d'écoulements selon l'importance respective du terme d'advection, de la force de Coriolis et du terme instationnaire (la force visqueuse sera toujours négligée ici, i.e.  $Re \gg 1$ ) :

1.  $Ro \gg 1$ . L'écoulement est fortement non-linéaire et l'effet de la rotation est négligeable : on retrouve une turbulence classique telle que décrite dans la section précédente. Dans ce cas, le taux d'évolution de la vitesse  $U$  associée à l'échelle  $L$  est donné par l'inverse du temps non-linéaire  $\sigma = 1/\tau_{nl} = U/L$  si bien que  $\sigma_* = Ro$ .
2.  $Ro \ll 1$ ,  $\sigma_* \leq 1$ . L'écoulement est dominé par des ondes spécifiques aux écoulements en rotation appelées ondes d'inertie. Ces ondes interagissent à travers un processus faiblement non-linéaire appelé résonance triadique.
3.  $Ro \ll 1$ ,  $\sigma_* \ll 1$ . L'écoulement évolue sur un temps très long devant la période de rotation  $1/\Omega$  et est entièrement dominé par les effets de rotation. Dans cette limite, l'écoulement devient invariant selon l'axe de rotation (théorème de Taylor-Proudman [16]).
4.  $Ro \lesssim 1$ . Dans ce régime, la force de Coriolis domine la dynamique de l'écoulement mais est toutefois fortement couplée aux non-linéarités. Dans ce mémoire, nous nous intéresserons particulièrement à ce régime que nous appellerons "turbulence en rotation". Ce régime, qui contient la physique la plus riche, est le plus pertinent pour décrire la plupart des écoulements naturels.

Il est important de nuancer ce panorama qui repose sur le choix des grandeurs  $U$ ,  $L$  et  $\sigma$ . Les écoulements turbulents en rotation sont susceptibles de contenir une large gamme d'échelles spatiales  $r$  et temporelles  $1/\sigma$  distribuées de part et d'autre de l'échelle et de la fréquence caractéristiques du forçage. Ces gammes d'échelles sont associées à une large gamme de nombres de Rossby  $Ro_{r,\sigma} = U_{r,\sigma}/2\Omega r$  et de nombres de fréquence adimensionnée  $\sigma/2\Omega$  avec  $U_{r,\sigma}$  la

---

1. Nous avons ici choisi de normaliser la pression par l'ordre de grandeur de la force de Coriolis :  $p^* = p/2\rho\Omega UL$ . Il est à noter que la pression ne peut jamais être négligée car elle assure l'incompressibilité du fluide ( $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ).

vitesse caractéristique associée à l'échelle  $r$  et à la fréquence  $\sigma$ . Un même écoulement pourra ainsi explorer, selon les échelles spatiales et temporelles considérées, plusieurs des régimes évoqués précédemment.

### 1.3 Écoulements dominés par la rotation

Dans cette section, nous nous proposons de discuter plus en détail les différents régimes d'écoulements inviscides fortement dominés par la force de Coriolis (i.e. les régimes 2 et 3 évoqués dans la section précédente).

#### 1.3.1 Théorème de Taylor-Proudman $Ro = 0, \sigma_* \rightarrow 0$

On considère d'abord la limite linéaire et quasi-stationnaire  $\sigma_* \ll 1$  de l'équation de Navier-Stokes

$$0 = -\frac{1}{\rho} \nabla p - 2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{u}. \quad (1.18)$$

Cette équation traduit l'équilibre entre la force de Coriolis et le gradient de pression : on parle d'équilibre géostrophique. Il implique que les lignes de courant coïncident avec les isobares. En appliquant l'opérateur rotationnel à l'équation (1.18), on obtient finalement

$$(\mathbf{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} = 0, \quad (1.19)$$

qui constitue le théorème de Taylor-Proudman [16]. Il se traduit par l'invariance de l'écoulement selon la direction du vecteur rotation  $\mathbf{\Omega}$ . Il est à noter que le champ de vitesse est toujours a priori à trois composantes non nulles (champ de vitesse 2D-3C).

#### 1.3.2 Ondes d'inertie $Ro = 0, \sigma_* \leq 1$

Considérons à présent un écoulement instationnaire, toujours dans un régime linéaire et non visqueux. L'équation de Navier-Stokes se réduit alors à

$$\partial_t \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - 2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{u}. \quad (1.20)$$

Cette équation admet des solutions de type ondes planes [16, 17] de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  et de fréquence temporelle  $\sigma$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = u_0 \mathbf{h}_s \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \sigma t)], \quad (1.21)$$

$$\text{avec } \mathbf{h}_s = \mathbf{e}^{(1)} - i s \mathbf{e}^{(2)}, \quad (1.22)$$

$$\mathbf{e}^{(1)} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \times \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{\Omega}}{|\mathbf{k} \times \mathbf{\Omega}|}, \quad \mathbf{e}^{(2)} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{\Omega}}{|\mathbf{k} \times \mathbf{\Omega}|}, \quad \mathbf{e}^{(3)} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}, \quad (1.23)$$

### 1.3. ÉCOULEMENTS DOMINÉS PAR LA ROTATION

---

sous la condition de respecter la relation de dispersion

$$\sigma = -s2\Omega \cdot \mathbf{k} = -s2\Omega \frac{k_z}{|\mathbf{k}|} = -s2\Omega \cos(\theta), \quad (1.24)$$

avec  $s = \pm 1$  et  $\theta$  l'angle entre  $\Omega$  et le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ . Nous adopterons la convention  $\sigma \geq 0$  si bien que le signe de  $s$  est contraint par celui de  $k_z$  :  $-sk_z \geq 0$ . Il s'agit des ondes d'inertie dont nous rappelons ci-dessous les propriétés importantes. Ce sont des ondes transverses (on a  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} = 0$  par incompressibilité du fluide) dites "hélicoïdales" car leur champ de vitesse est aligné avec leur champ de vorticité  $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$ , le signe de  $s$  déterminant celui de l'hélicité  $\mathbf{u} \cdot \omega$ . Ce champ de vitesse correspond à un mouvement de translation circulaire de l'ensemble des plans perpendiculaires à  $\mathbf{k}$  dans le sens anticyclonique (c'est à dire opposé à la rotation) et à la pulsation  $\sigma$  (voir figure 1.4).

Cette relation de dispersion (1.24) est tout à fait singulière. La fréquence  $\sigma$  ne sélectionne pas la norme du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  mais seulement sa direction, qui fait un angle  $\theta$  avec l'axe de rotation. On remarque que dans la limite  $\sigma \rightarrow 0$  le vecteur d'onde est horizontal et l'on retrouve le théorème de Taylor-Proudman. La relation de dispersion prévoit également que les ondes ne peuvent exister qu'à des fréquences inférieures à la fréquence de Coriolis  $\sigma \leq 2\Omega$ . Leur vitesse de phase  $\mathbf{c}_\varphi$  et de groupe  $\mathbf{c}_g$  valent

$$\mathbf{c}_\varphi = 2(\mathbf{k} \cdot \Omega) \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^3}, \quad (1.25)$$

$$\mathbf{c}_g = 2s\mathbf{k} \times \frac{\mathbf{k} \times \Omega}{|\mathbf{k}|^3}. \quad (1.26)$$

Ces ondes sont dispersives ( $\mathbf{c}_\varphi$  est une fonction de  $k$ ) et ont surtout la propriété étonnante d'avoir leur vitesse de groupe perpendiculaire à leur vitesse de phase. L'énergie se propage selon  $\mathbf{c}_g$  dans le plan contenant  $\Omega$  et  $\mathbf{k}$ , dans la direction qui fait un angle  $\theta$  avec l'horizontale. On remarquera enfin que les caractéristiques de la relation de dispersion des ondes d'inertie sont très similaires à celles des ondes internes de gravité dans les fluides stratifiés [18, 19].

#### 1.3.3 Turbulence faiblement non-linéaire $Ro \rightarrow 0$ , $\sigma_* \leq 1$

Dans cette section, nous nous intéressons à la limite faiblement non-linéaire de l'équation de Navier-Stokes en référentiel tournant. Nous nous appuyons sur la décomposition des champs de vitesse sur la base complète des modes hélicoïdaux introduite par Waleffe [20–22]

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}, s_{\mathbf{k}}=\pm 1} A_{s_{\mathbf{k}}}(\mathbf{k}, t) \mathbf{h}_{s_{\mathbf{k}}}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (1.27)$$

où  $s_{\mathbf{k}} = \pm 1$  désigne le signe de l'hélicité et  $A_{s_{\mathbf{k}}}(\mathbf{k}, t)$  l'amplitude de chaque mode. On peut noter que cette décomposition est très similaire à la décomposition de Craya-Herring [23, 34, 83] développée antérieurement (les différences entre ces deux décompositions sont décrites en détail dans Sagaut et Cambon [17]). L'équation de Navier-Stokes se ramène alors à une série d'équations

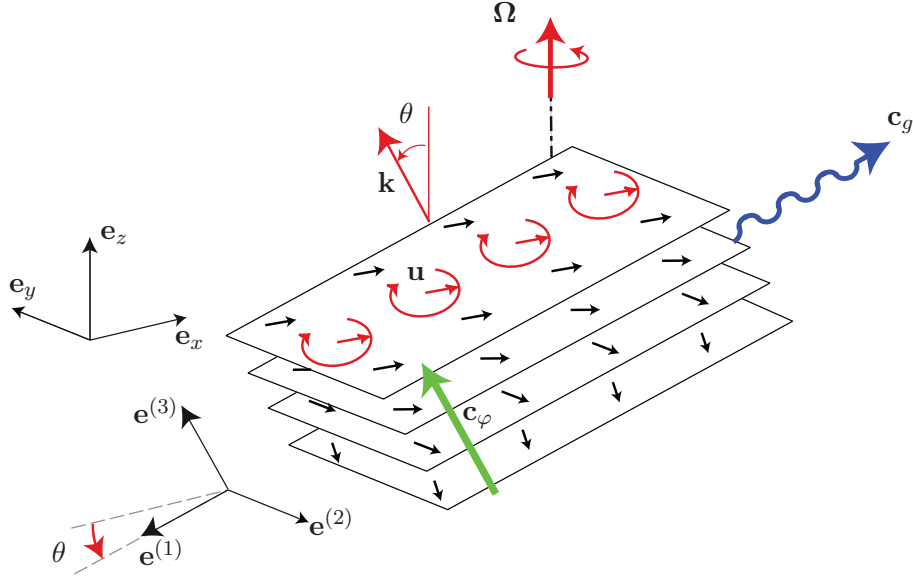


FIGURE 1.4 – Représentation schématique d’une onde plane d’inertie d’hélicité négative ( $s = -1$ ).

régissant l’évolution temporelle de l’amplitude de chaque mode. Pour un écoulement soumis à une rotation d’ensemble, ces équations sont

$$(\partial_t + \nu \mathbf{k}^2 + i\sigma_{s_{\mathbf{k}}}) A_{s_{\mathbf{k}}}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}+\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{0}} \sum_{s_{\mathbf{p}}, s_{\mathbf{q}}} C_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}^{s_{\mathbf{k}}s_{\mathbf{p}}s_{\mathbf{q}}} A_{s_{\mathbf{p}}}^* A_{s_{\mathbf{q}}}^*, \quad (1.28)$$

$\sigma_{s_{\mathbf{k}}} = -2s_{\mathbf{k}}\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$  désignant la fréquence de l’onde d’inertie associée au vecteur  $\mathbf{k}$ ,  $*$  le complexe conjugué et  $C_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}^{s_{\mathbf{k}}s_{\mathbf{p}}s_{\mathbf{q}}}$  des coefficients d’interaction dérivables analytiquement [20–22]. Cette équation met en évidence le fait que l’énergie se transfère à travers des triades d’ondes dont les vecteurs d’onde vérifient  $\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{0}$ . La présence du terme  $i\sigma_{s_{\mathbf{k}}}A_{s_{\mathbf{k}}}$  (provenant de la force de Coriolis) suggère naturellement et sans hypothèse supplémentaire de reformuler l’amplitude des modes selon  $A_{s_{\mathbf{k}}}(\mathbf{k}, t) = B_{s_{\mathbf{k}}}(\mathbf{k}, t)e^{-i\sigma_{s_{\mathbf{k}}}t}$ , ce qui revient à décomposer le champ de vitesse en une somme d’ondes d’inertie d’amplitude  $B_{s_{\mathbf{k}}}(\mathbf{k}, t)$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}, s_{\mathbf{k}}=\pm 1} B_{s_{\mathbf{k}}}(\mathbf{k}, t) \mathbf{h}_{s_{\mathbf{k}}}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \sigma_{s_{\mathbf{k}}}t)}. \quad (1.29)$$

Les équations (1.28) se ramènent alors aux équations d’évolution de l’amplitude  $B_{s_{\mathbf{k}}}(\mathbf{k}, t)$  des ondes  $(\mathbf{k}, \sigma_{s_{\mathbf{k}}})$

$$(\partial_t + \nu \mathbf{k}^2) B_{s_{\mathbf{k}}}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}+\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{0}} \sum_{s_{\mathbf{p}}, s_{\mathbf{q}}} C_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}^{s_{\mathbf{k}}s_{\mathbf{p}}s_{\mathbf{q}}} B_{s_{\mathbf{p}}}^* B_{s_{\mathbf{q}}}^* e^{i(\sigma_{s_{\mathbf{k}}} + \sigma_{s_{\mathbf{p}}} + \sigma_{s_{\mathbf{q}}})t}. \quad (1.30)$$

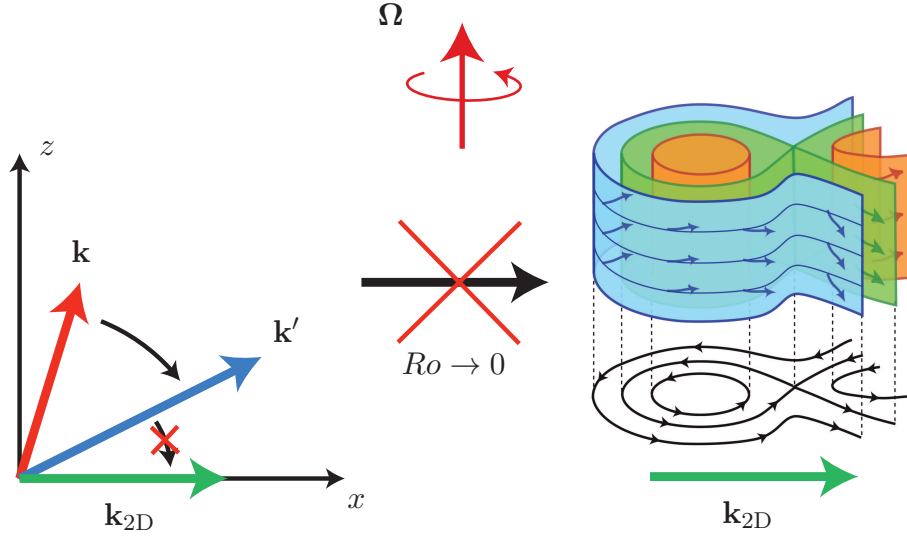


FIGURE 1.5 – Représentation schématisée des transferts d’énergie en turbulence d’ondes d’inertie dans la limite  $Ro \rightarrow 0$ . Les transferts sont dirigés vers des vecteurs d’onde plus horizontaux et de norme plus grande. Dans cette limite, le mode exactement 2D est découplé des modes 3D.

Ce formalisme constitue le point de départ des modèles de type “AQNM” (Asymptotic Quasi-Normal Markovian) [17, 23] et de turbulence d’ondes [24–27] dont nous rappelons les principaux résultats. Ces modèles considèrent une assemblée d’ondes d’inertie en interaction faiblement non-linéaire ( $Ro \rightarrow 0$ ), ce qui se traduit par le fait que l’amplitude de ces ondes  $B_{s\mathbf{k}}$  évolue sur un temps caractéristique de transfert  $\tau_{tr}$  très grand devant leurs périodes  $1/\sigma_{s\mathbf{k}}$ . Cette séparation d’échelle de temps est nécessaire pour que cette décomposition en ondes ait un sens. Les modèles de turbulence d’ondes [27, 28] prévoient dans la limite inviscide et faiblement non-linéaire une solution anisotrope pour le spectre 3D d’énergie

$$e(\mathbf{k}) \sim k_{\perp}^{-7/2} k_{\parallel}^{-1/2} \quad (1.31)$$

avec  $k_{\parallel} = |\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}|/|\boldsymbol{\Omega}|$  et  $k_{\perp} = \sqrt{k^2 - k_{\parallel}^2}$ . De manière générale, ces modèles prédisent également un transfert d’énergie direct et anisotrope dirigé vers des vecteurs d’onde de plus en plus horizontaux et donc associés à des fréquences de plus en plus faibles (figure 1.5). Le temps caractéristique de transfert à travers une échelle  $1/k$  est de l’ordre de

$$\tau_{tr} \sim \tau_{nl}^2 / \tau_{dec}, \quad (1.32)$$

où  $\tau_{nl} = 1/ku_k$  est le temps non-linéaire<sup>2</sup> et  $\tau_{dec}$  est le temps de décorrélation associés aux ondes de nombre d’onde  $k$ . Dans la limite fortement non-linéaire, la physique des ondes ne gère plus la dynamique rapide des modes hélicoïdaux et le temps de décorrélation s’identifie au temps non-

2.  $u_k$  mesure ici la vitesse typique associée au nombre d’onde  $k$ .



linéaire. En extrapolant la formule (1.32) au cas fortement non-linéaire ( $\tau_{dec} = \tau_{nl}$ ), on retrouve alors le temps de transfert usuel de la turbulence isotrope  $\tau_{tr} \sim \tau_{nl}$ . En revanche, dans la limite faiblement non-linéaire ( $Ro \ll 1$ ), le temps de décorrélation est imposé par la physique des ondes  $\tau_{dec} = 1/\Omega$  ce qui conduit à un temps de transfert  $\tau_{tr} \sim \tau_{nl}/Ro$ , plus grand d'un facteur  $1/Ro$  que dans le cas non tournant [23–27]. Cela se traduit par une réduction des transferts directs d'énergie par rapport au cas non tournant

$$\Pi \sim \frac{u_k^2}{\tau_{tr}} \sim Ro \Pi_{iso}, \quad (1.33)$$

où  $\Pi_{iso} \sim u_k^2/\tau_{nl} = k u_k^3$  est le taux de transfert en turbulence 3D isotrope. Dans une cascade directe de turbulence, la dissipation à petite échelle étant imposée par le flux d'énergie dans la gamme inertielle, il découle une dissipation elle-même réduite d'un facteur Rossby par rapport au cas sans rotation  $\varepsilon \sim Ro \varepsilon_{iso}$ .

En regardant de plus près l'équation (5.5), on comprend que les triades efficaces pour échanger l'énergie sur le temps  $\tau_{tr}$  sont telles que  $(\sigma_{s_k} + \sigma_{s_p} + \sigma_{s_q})\tau_{tr} \ll 1$ . Autrement, l'exponentielle imaginaire de l'équation (5.5) oscille rapidement et sa contribution moyenne sur le temps  $\tau_{tr}$  est négligeable. À partir de la prédiction (1.32) pour  $\tau_{tr}$  on en déduit que seules les triades satisfaisant la relation

$$\frac{\sigma_{s_k} + \sigma_{s_p} + \sigma_{s_q}}{2\Omega} \ll Ro^2 \quad (1.34)$$

vont être capables d'échanger efficacement l'énergie. Cette dernière relation met en évidence que seules les triades exactement résonantes ( $\sigma_{s_k} + \sigma_{s_p} + \sigma_{s_q} = 0$ ) échangent de l'énergie pour  $Ro \rightarrow 0$ . En revanche, à nombre de Rossby fini, des triades quasi-résonantes deviennent aussi efficaces pour transférer l'énergie. Leur nombre est croissant avec  $Ro$ , ce qui traduit la complexité croissante de la dynamique quand l'importance des non-linéarités croît. Dans un régime fortement non-linéaire, la turbulence ne pourra alors plus être décrite par la superposition des processus élémentaires de résonance triadique [29].

Une dernière propriété de la turbulence faible d'ondes d'inertie est son incapacité dans la limite  $Ro \rightarrow 0$  à coupler le mode 2D associé à des vecteurs d'onde horizontaux aux modes 3D. Le coefficient de transfert  $C_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}^{s_k s_p s_q}$  est en effet nul lorsque l'un des vecteurs d'onde impliqués dans la triade est horizontal [21]. On notera cependant le fait que dans les écoulements réels et les simulations, le fluide est confiné verticalement. Ce confinement introduit une discrétisation dans l'espace spectral qui a pour effet d'autoriser le couplage entre le mode 2D et les ondes 3D [30–32]. Ces transferts entre les modes 3D et 2D sont très faibles quand  $Ro \rightarrow 0$  mais deviennent d'autant plus intenses que les non-linéarités sont fortes grâce à la possibilité d'échanger l'énergie à travers les triades quasi-résonantes. Ce couplage a été mis en évidence dans plusieurs simulations numériques directes [22, 30, 31].

## 1.4 Turbulence en rotation modérée

Dans cette section, nous nous intéressons au régime d'écoulement où les effets de la rotation et des non-linéarités sont fortement couplés, c'est à dire à nombre de Rossby inférieur à 1 mais fini. Ce régime est le plus pertinent pour décrire les écoulements géo/astrophysiques.

Il est surprenant de voir à quel point la force de Coriolis dont le travail est nul ( $2(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = 0$ ), modifie les propriétés statistiques et géométriques de la turbulence [1, 17]. Nous discutons principalement deux de ces propriétés : la tendance à la bidimensionnalisation et la modification des transferts d'énergie entre échelles.

### 1.4.1 Anisotropie de la turbulence en rotation

L'un des effets les plus robustes de la rotation sur la turbulence est d'induire une forte anisotropie. La turbulence se rapproche d'un état asymptotique bidimensionnel, a priori toujours à trois composantes, invariant le long de l'axe de rotation. Cette tendance a été mise en évidence dans de nombreuses études expérimentales et numériques [23, 33–38].

Une des expériences pionnières qui illustre cette tendance est celle de Hopfinger, Browand et Gagne [33]. Une grille horizontale est oscillée verticalement dans un cylindre en rotation. Cette expérience montre l'émergence de tourbillons persistents alignés avec l'axe de rotation (figure 1.6 gauche). On remarque tout de même que ces tourbillons ne sont pas parfaitement invariants verticalement et possèdent des variations à petites échelles. On devine ainsi que l'anisotropie de l'écoulement est dépendante de l'échelle considérée.

Plusieurs études (expérimentales et numériques) mettent clairement en évidence cette dépendance [36–39]. L'étude numérique récente de Delache *et al.* [38] montre notamment, pour une turbulence en déclin initialement isotrope, une anisotropie maximale du spectre spatial d'énergie à un nombre d'onde  $k$  intermédiaire (figure 1.6 droite) compatible avec le nombre d'onde de Zeman  $k_\Omega \sim 1/r_\Omega = \varepsilon^{-1/2}\Omega^{3/2}$  [40]. L'échelle de Zeman est déterminée dimensionnellement en supposant que le nombre de Rossby lui étant associé,  $U_r/\Omega r$ , est égal à 1, la vitesse caractéristique d'une échelle étant évaluée à partir des lois d'échelles de la turbulence 3D isotrope  $U_r \simeq (\varepsilon r)^{1/3}$ . En faisant l'exercice de pensée d'une turbulence homogène et isotrope soudainement soumise à la force de Coriolis à l'instant  $t = 0$ , l'échelle de Zeman exprime à l'instant  $t = 0$ , l'échelle au dessus de laquelle l'effet de la rotation se fait sentir. Le résultat de Delache *et al.* met donc en évidence le fait que le processus responsable de la bidimensionnalisation de l'écoulement est lié à un couplage fort entre la force de Coriolis et les non-linéarités ( $Ro \sim 1$ ) qui construit un transfert d'énergie des modes 3D en direction de modes de plus en plus invariants verticalement [30, 33, 41–43].

### 1.4.2 Écoulements 2D en rotation

Nous venons de voir que la rotation dirige les écoulements vers un état invariant selon l'axe de rotation du fluide. Il est intéressant de discuter le cas particulier des écoulements *exactement* invariants selon l'axe de rotation ( $\partial_z \mathbf{u} = \mathbf{0}$ ). Pour un fluide incompressible, leur

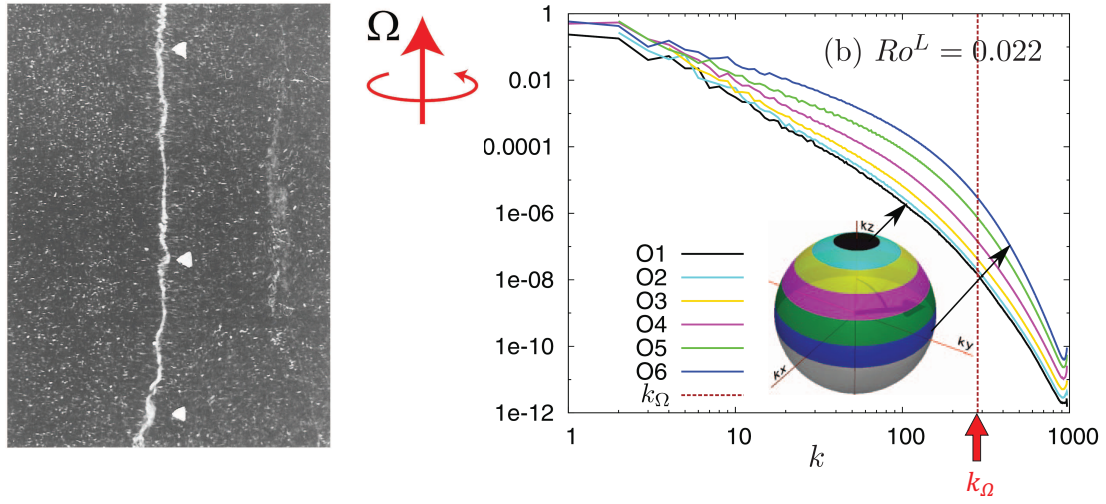


FIGURE 1.6 – À gauche : visualisation dans un plan vertical d’un tourbillon dans un écoulement turbulent généré par une grille oscillée dans un cylindre en rotation. Figure adaptée de Hopfinger *et al.* [33]. La visualisation est rendue possible par la présence de bulles qui s’agrègent dans les zones de basse pression. À droite : spectres spatiaux d’énergie en fonction du nombre d’onde  $k$  pour différents angles entre  $\mathbf{k}$  et  $\Omega$ . Données issues de simulations numériques de turbulence en déclin soumise à une rotation d’ensemble. La distribution d’énergie est initialement isotrope et devient de plus en plus anisotrope dans le temps sous l’action de la force de Coriolis. Figure adaptée de Delache *et al.* [38].

#### 1.4. TURBULENCE EN ROTATION MODÉRÉE

---

champ de vitesse peut alors se réécrire en terme d'une fonction de courant  $\Psi(x, y)$  comme  $\mathbf{u}(x, y) = (\partial_y \Psi, -\partial_x \Psi, u_z)$ . La force de Coriolis, qui se reformule alors comme  $\nabla(-2\rho\Omega\Psi)$ , peut être absorbée dans le gradient de pression : on voit qu'elle n'a donc plus aucune influence sur la dynamique de l'écoulement.

À mesure que la force de Coriolis amène l'écoulement vers un état 2D, elle perd ainsi son emprise sur celui-ci. Le processus de bidimensionnalisation est alors d'autant plus lent que l'écoulement s'approche de l'état 2D. En pratique, la turbulence en rotation a un nombre de Rossby fini peut être décrite comme la superposition d'un écoulement 3D affecté par la rotation et d'un écoulement 2D qui ne ressent l'effet de la rotation que par son couplage avec l'écoulement 3D, ce couplage tendant vers 0 pour  $Ro \rightarrow 0$ , comme évoqué à la section 1.3.3.

Une autre particularité des écoulements exactement 2D mais toujours à 3 composantes de vitesse est le découplage entre la contribution horizontale de la vitesse  $\mathbf{u}_\perp = u_x \mathbf{e}_x + u_y \mathbf{e}_y$  et la composante verticale  $u_\parallel \mathbf{e}_z$ . La contribution  $\mathbf{u}_\perp$  est régie par l'équation de Navier Stokes 2D

$$\partial_t \mathbf{u}_\perp + (\mathbf{u}_\perp \cdot \nabla) \mathbf{u}_\perp = -(\mathbf{e}_x \partial_x + \mathbf{e}_y \partial_y) p - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_\perp + \nu(\partial_x^2 + \partial_y^2) \mathbf{u}_\perp \quad (1.35)$$

et est donc a priori associée à une cascade inverse d'énergie dans le plan horizontal. La composante verticale est, elle, un scalaire passif advecté par  $\mathbf{u}_\perp$  et est régie par l'équation d'advection-diffusion

$$\partial_t u_\parallel + (\mathbf{u}_\perp \cdot \nabla) u_\parallel = \nu(\partial_x^2 + \partial_y^2) u_\parallel. \quad (1.36)$$

Les structures formées par la vitesse  $u_\parallel$  sont ainsi étirées puis repliées par la contribution horizontale  $\mathbf{u}_\perp$ . Il en résulte un transfert direct de l'énergie associée à la composante verticale.

##### 1.4.3 Transferts horizontaux d'énergie en turbulence en rotation

Pour décrire les transferts d'énergie dans le plan perpendiculaire à l'axe de rotation, il est commode de décomposer le champ de vitesse en une contribution tridimensionnelle  $\mathbf{u}_{3D}$  affectée par la rotation et une contribution bidimensionnelle invariante selon l'axe de rotation  $\mathbf{u}_{2D}$  non affectée par la rotation. On rappelle que dans la limite faiblement non-linéaire ( $Ro \rightarrow 0$ ), ces deux composantes de l'écoulement sont découplées et évoluent donc indépendamment. La contribution 3D est a priori associée à une cascade directe d'énergie et la contribution 2D, à une cascade inverse de l'énergie horizontale et à une cascade directe de l'énergie verticale dans le plan perpendiculaire à l'axe de rotation. On s'attend alors à ce que les transferts d'énergie entre échelles dans le plan perpendiculaire à l'axe de rotation et notamment leur direction soient déterminés par la superposition de ces cascades.

À nombre de Rossby fini, les modes 2D et 3D sont cette fois couplés, le couplage étant d'autant plus important que le nombre de Rossby est grand. Il est donc intéressant de s'interroger sur la direction des transferts d'énergie dans le plan perpendiculaire à l'axe de rotation dans ce régime.

Cette question a été principalement abordée au moyen de simulations numériques directes de turbulence forcée où l'énergie est injectée à un taux constant  $P$  à un nombre d'onde de

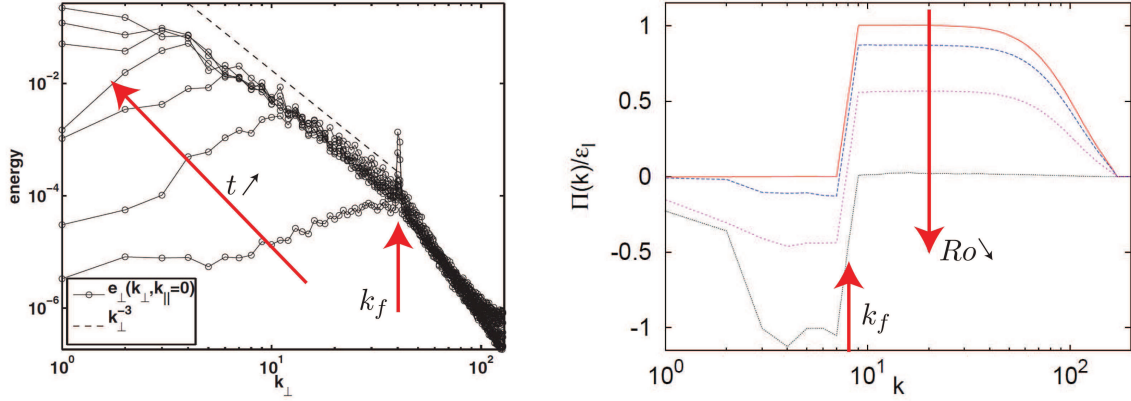


FIGURE 1.7 – À gauche : évolution temporelle du spectre horizontal d'énergie pendant le régime transitoire d'une turbulence forcée à l'échelle  $1/k_f$ . On observe une croissance de l'énergie aux nombres d'onde inférieurs à  $k_f$  se propageant d'échelle en échelle.. Adaptée de Sen *et al.* [49]. À droite : flux horizontal d'énergie entre échelles normalisé par le taux d'injection d'énergie  $\varepsilon_I$  d'une turbulence forcée à l'échelle  $1/k_f$ . On observe l'inhibition de la cascade directe d'énergie pour  $k > k_f$  et l'émergence d'une cascade inverse pour  $k < k_f$  à mesure que le nombre de Rossby de forçage  $Ro$  diminue. Adapté de Deusebio *et al.* [50].

forçage  $k_f$  [22, 44–51]. Ces simulations mettent en évidence, dans le régime transitoire, une croissance du spectre d'énergie aux échelles horizontales plus grandes que l'échelle de forçage  $k_\perp < k_f$  qui s'interprète comme une cascade inverse d'énergie (figure 1.7 gauche). Certaines de ces études présentent également la mesure directe des transferts d'énergie entre échelles  $\Pi$ . Ces données révèlent la possibilité d'une double cascade : directe aux échelles inférieures à l'échelle d'injection  $k_\perp > k_f$  et inverse aux échelles plus grandes  $k_\perp < k_f$  (figure 1.7 droite). Globalement elles montrent une cascade inverse plus prononcée et une cascade directe moins prononcée voire complètement inhibée à mesure que le nombre de Rossby associé au forçage décroît.

Les études expérimentales sur les transferts d'énergie sont peu nombreuses, la raison principale étant liée aux difficultés techniques associées à la mesure des flux d'énergie entre échelles. Ce n'est seulement qu'à partir des années 2000, et des progrès réguliers des techniques de vélocimétrie par images de particules (PIV), que de telles études ont pu être réalisées. On peut citer les travaux de Baroud *et al.* [52] (turbulence forcée) et de Morize *et al.* [53] (turbulence en déclin) qui ont mis en évidence un changement de signe du moment d'ordre 3 des incréments longitudinaux de vitesse  $S_3(r) = \langle \delta u_l^3 \rangle$ . Le signe de  $S_3$  renseigne sur la direction de la cascade d'énergie dans un contexte isotrope, où il est du même signe que le flux d'énergie  $\Pi(r)$  au cœur d'une cascade d'énergie (voir section 1.1). Cependant, dans un contexte anisotrope, il n'existe pas de relation théorique permettant de reconstruire  $\Pi$  à partir de  $S_3$ , en particulier lorsque comme ici il est associé à un changement de signe des transferts d'énergie. Ces résultats ne permettent donc pas d'établir clairement la direction des transferts même s'ils constituent des indices très solides.

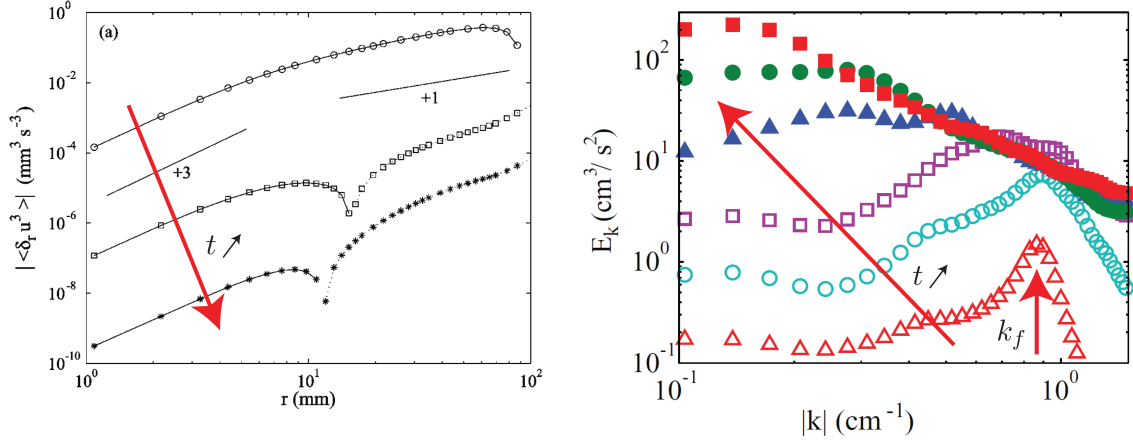


FIGURE 1.8 – À gauche : évolution temporelle de la valeur absolue du moment d'ordre 3 des incréments longitudinaux de vitesse  $S_3(r)$  dans le plan horizontal d'une turbulence expérimentale en déclin et en rotation. On observe un changement de signe de  $S_3$  qui se propage vers les petites échelles avec le temps. Adapté de Morize *et al.* [53]. À droite : évolution temporelle du spectre spatial d'énergie du champ de vitesse horizontal dans un plan horizontal d'une turbulence en rotation forcée par un réseau de jets. Adapté de Yarom *et al.* [54].

Plus récemment, Yarom et Sharon (2013) [54] ont étudié l'évolution temporelle du spectre spatial d'énergie horizontale pendant la phase transitoire d'une turbulence en rotation forcée par un réseau de jets. Ils rapportent une croissance de l'énergie aux grandes échelles horizontales se propageant d'échelle en échelle (figure 1.8 droite), ce qui constitue un indice marqué d'une cascade inverse. Cependant, la turbulence générée expérimentalement est inhomogène (ce qui est inévitable dans une expérience de turbulence forcée). Ainsi, la croissance d'énergie aux grandes échelles peut aussi être en partie attribuée à un transport spatial d'énergie (conséquence des inhomogénéités) qui amène de grandes structures dans le champ de mesure si bien qu'il n'est pas possible d'interpréter de manière définitive ces observations.

#### 1.4.4 Turbulence en rotation et ondes d'inertie

Les modèles de turbulence d'ondes d'inertie, même s'ils sont développés pour un nombre de Rossby infiniment faible  $Ro \rightarrow 0$ , prédisent certains comportements similaires à ce qui est observé en turbulence en rotation à nombre de Rossby fini tels que la réduction des transferts directs à mesure que le nombre de Rossby diminue [46–51, 53]. Ils prédisent également des transferts anisotropes dirigés vers des modes de plus en plus invariants selon l'axe de rotation, ce qui est qualitativement compatible avec la tendance à la bidimensionnalisation de la turbulence en rotation. Cependant, ces modèles ne prédisent pas l'émergence d'un mode 2D énergétique qui est pourtant une caractéristique majeure des écoulements turbulents en rotation. La pertinence de

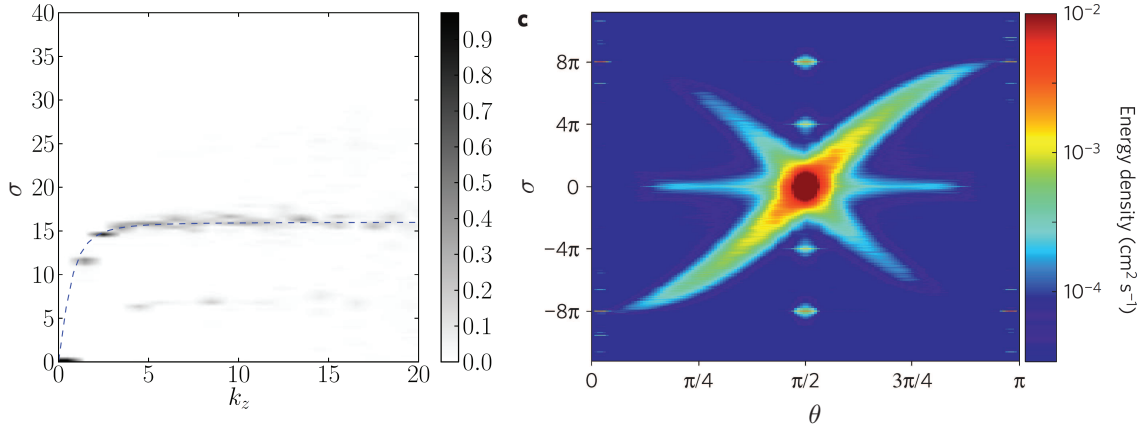


FIGURE 1.9 – À gauche : spectre spatio-temporel d’énergie représenté dans le plan  $(\sigma, k_z)$  pour  $k_x = 0$  et  $k_y = k_f/\sqrt{3}$ , issu d’une simulation numérique de turbulence en rotation forcée au nombre d’onde  $k_f$ . La courbe tiretée représente la relation de dispersion des ondes d’inertie. Figure adaptée de Clark di Leoni *et al.* [55]. À droite : spectre spatio-temporel d’énergie moyenné sur les nombres d’onde compris entre  $2.3k_f$  et  $2.9k_f$  représenté dans le plan  $(\sigma, \theta)$ ,  $\theta$  indiquant l’angle entre le vecteur d’onde et l’axe de rotation. Données issues d’une expérience de turbulence en rotation ( $\Omega = 4\pi \text{ rad s}^{-1}$ ) forcée par un réseau de jets au nombre d’onde  $k_f$ .  $\theta$  désigne l’angle entre le vecteur d’onde et le vecteur rotation. Figure adaptée de Yarom *et al.* [56].

la théorie de turbulence d’ondes d’inertie pour décrire la turbulence en rotation est ainsi sujet à débat. Dans ce contexte, il existe cependant assez peu de travaux numériques et expérimentaux tentant de déterminer le domaine de validité de ce modèle.

Les études récentes de Clark di Leoni *et al.* [55] (numérique) et de Yarom et Sharon [56] (expérimentale) en 2014 constituent cependant une avancée significative dans ce sens. Clark di Leoni *et al.* [55] génèrent numériquement une turbulence en rotation statistiquement stationnaire forcée à grande échelle. Ils montrent, par une analyse spectrale spatio-temporelle, que la distribution d’énergie se concentre sur la relation de dispersion des ondes d’inertie aux nombres d’onde supérieurs mais proches de l’échelle d’injection  $k_f$  (figure 1.9 gauche). Ils observent cependant que la signature temporelle des modes de vecteurs d’onde les plus horizontaux ( $\theta = \cos^{-1}(|k_{\parallel}|/|\mathbf{k}|) \rightarrow \pi/2$ ) n’est plus fixée par la fréquence intrinsèque des ondes  $\sigma_i = 2\Omega k_{\parallel}/|\mathbf{k}|$ . Ils montrent également que l’angle  $\theta_c(k)$  en dessous duquel la signature spatio-temporelle des modes est celle des ondes d’inertie décroît à mesure que le nombre d’onde  $k$  augmente. Ils montrent par ailleurs que le temps de décorrélation  $\tau_{dec}$  associé aux modes  $(k, \theta)$  tels que  $\theta > \theta_c(k)$  est fixé par l’effet de balayage (“sweeping” en anglais) stochastique des ondes par la vitesse à grande échelle qui impose une fréquence  $\sigma = kU$  avec  $U$  la moyenne quadratique de la vitesse (figure 1.10).

Yarom et Sharon [56], dans leur expérience de turbulence forcée par un réseau de jets présentée plus haut, ont aussi réalisé, une fois le régime stationnaire atteint, une analyse spectrale spatio-temporelle à partir de mesures 3D2C des champs de vitesse. Ils montrent alors que l’éner-



#### 1.4. TURBULENCE EN ROTATION MODÉRÉE

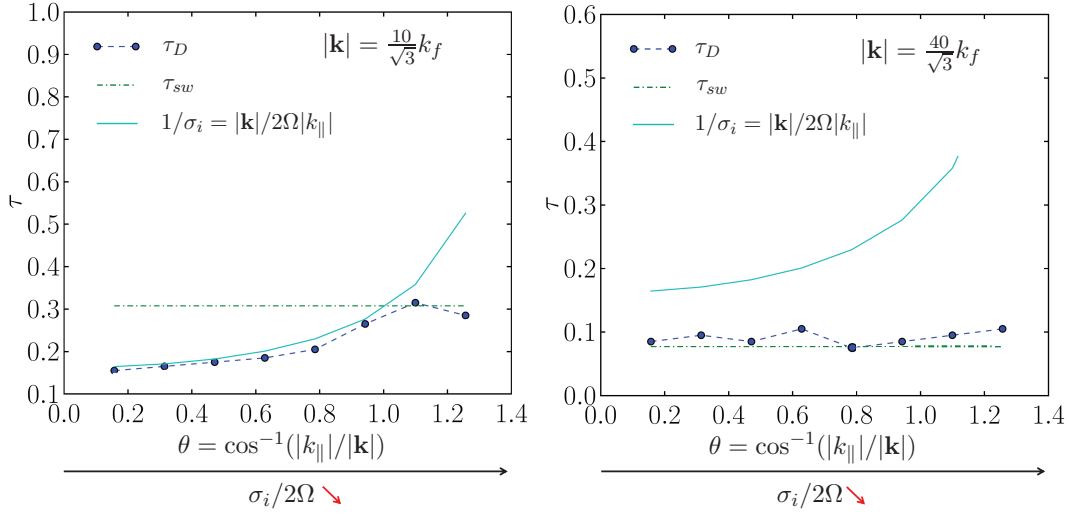


FIGURE 1.10 – Temps de décorrélation  $\tau_D$  en fonction de l’angle  $\theta$  entre le vecteur d’onde  $\mathbf{k}$  et l’axe de rotation pour les modes de nombre de d’onde  $10k_f/\sqrt{3}$  (à gauche) et  $40k_f/\sqrt{3}$  (à droite). Sont également représentés les prédictions de la période intrinsèque des ondes d’inertie  $1/\sigma_i(\mathbf{k})$  et du temps associé au phénomène de balayage  $\tau_{sw} = (kU)^{-1}$  où  $U$  est la moyenne quadratique de la vitesse. Figures adaptées de Clark di Leoni *et al.* [55].

gie se concentre sur la relation de dispersion des ondes d’inertie aux échelles plus petites que l’échelle de forçage  $k > k_f$  (figure 1.9 droite). Il est à noter cependant que ces ondes ne présentent qu’une part très faible de l’énergie totale de l’écoulement, la majorité de l’énergie se trouvant aux échelles plus grandes que celle du forçage (figure 1.8 droite).

Il est à noter enfin que la présence de ces ondes d’inertie constitue simplement une condition nécessaire pour que les modèles de turbulence d’ondes puissent s’appliquer, mais ne préjuge en aucun cas de la pertinence de leur prédictions. Il n’existe actuellement aucun travaux expérimentaux testant de manière quantitative les prédictions de la turbulence d’onde d’inertie, notamment pour les spectres d’énergie ou les transferts d’énergie entre échelles.

##### 1.4.5 Importance du confinement vertical et des propriétés du forçage

Dans l’ensemble, les propriétés de la turbulence en rotation que nous avons présentées sont dépendantes du nombre de Rossby. Il faut cependant noter l’influence importante du confinement vertical  $H$ , l’effet de bidimensionnalisation de l’écoulement étant accentué quand  $H$  diminue [57]. Plusieurs études numériques montrent ainsi que le nombre de Rossby critique en dessous duquel apparaît une cascade inverse croît rapidement lorsque  $k_f H$  diminue [22, 44, 50]. On peut également noter l’influence remarquable des caractéristiques du forçage sur les propriétés de la turbulence. Sa dimensionnalité (2D ou 3D) influence évidemment l’anisotropie de l’écoulement et de ce fait les transferts d’énergie. Mininni *et al.* [58, 59] pointent également l’importance de l’injection d’hélicité par le forçage et notamment de l’alimentation d’une cascade directe d’hélicité



qui domine alors la cascade directe d'énergie.

### 1.5 Plan du manuscrit

La turbulence en rotation peut être décrite comme un entremêlement complexe d'ondes d'inertie et de structures tourbillonnaires 2D et 3D. L'importance relative de ces structures en termes d'énergie ou de rôle sur la dynamique de l'écoulement dépend de nombreux paramètres tels que le nombre de Rossby, les caractéristiques de l'injection d'énergie, le confinement... À ce jour, les études théoriques, numériques et expérimentales apportent une vision de la turbulence en rotation encore incomplète, ce qui appelle à de nouvelles expériences.

Dans cette étude nous apportons de nouvelles contributions expérimentales à la compréhension de la turbulence en rotation.

Dans le chapitre 2, je décrirai le dispositif expérimental sur lequel reposeront les résultats présentés aux chapitres 3 et 4. Il consiste en un aquarium en rotation dans lequel est générée une turbulence statistiquement stationnaire à l'aide de générateurs de dipôle de tourbillons. Une première caractérisation de l'écoulement étudié sera ensuite réalisée à partir de quantités statistiques en un point.

Dans le chapitre 3, on s'intéresse aux transferts d'énergie entre échelles dans le plan perpendiculaire à l'axe de rotation. Nous présentons les premières mesures directes de ces transferts dans une expérience de turbulence en rotation. Celles-ci mettent en évidence un renversement progressif de la cascade d'énergie sous l'action de la rotation globale se traduisant dans le régime intermédiaire par une double cascade d'énergie (directe à petite échelle et inverse à grande échelle). À partir de la généralisation de l'équation de KHM au cas inhomogène [15], nous quantifions également l'injection d'énergie qui est intrinsèquement liée aux inhomogénéités de la turbulence.

Au chapitre 4, on s'intéresse à la pertinence des modèles de turbulence d'ondes d'inertie pour décrire une réalisation expérimentale de turbulence en rotation à nombre de Rossby fini. À l'instar de Yarom et Sharon [56], nous réalisons une analyse spatio-temporelle dans le but de détecter la trace de ces ondes. Notre analyse met en évidence leur présence aux plus grandes échelles et pour les plus grands taux de rotation uniquement. Nous montrons en effet que leur signature spatio-temporelle est brouillée aux petites échelles et faibles fréquences. De même que Clark di Leoni *et al.* [55] nous identifions le processus de balayage stochastique de ces ondes par le mode 2D comme responsable de leur brouillage.

Au chapitre 5, nous présentons des résultats préliminaires sur l'effet de la rotation sur la dissipation d'énergie dans une nouvelle expérience originale. Le dispositif expérimental consiste en une cuve fermée remplie d'eau et disposée sur la plate-forme tournante, dans laquelle une turbulence statistiquement stationnaire est entretenue par une hélice mise en rotation par un moteur. La puissance moyenne dissipée dans l'écoulement est alors évaluée comme la puissance consommée par le moteur. À grand taux de rotation d'ensemble on observe un régime de dissipation diminué d'un facteur  $Ro$  par rapport à la dissipation d'une turbulence 3D homogène et

## 1.5. PLAN DU MANUSCRIT

---

isotrope, ce qui est compatible avec les prédictions de la turbulence d'ondes d'inertie.

Les résultats relatifs à cette thèse ont fait l'objet des publications suivantes :

1. *Scale-dependent cyclone-anticyclone asymmetry in a forced rotating turbulence experiment*, B. Gallet, A. Campagne, P.-P. Cortet, F. Moisy, Phys. Fluids **26**, 035108 (2014)
2. *Direct and inverse energy cascades in a forced rotating turbulence experiment*, A. Campagne, B. Gallet, F. Moisy, P.-P. Cortet, Phys. Fluids **26**, 125112 (2014)
3. *Disentangling inertial waves from eddy turbulence in a forced rotating turbulence experiment*, A. Campagne, B. Gallet, F. Moisy, P.-P. Cortet, Phys. Rev. E **91**, 043016 (2015)



## Chapitre 2

# Dispositif expérimental et caractérisation basique de l'écoulement

Dans ce chapitre, nous présentons le dispositif expérimental associé aux résultats présentés aux chapitres 3 et 4. Il consiste en un aquarium en rotation dans lequel est généré un écoulement turbulent. Nous décrirons d'abord l'expérience dans son ensemble. Nous introduirons ensuite le principe de notre technique de mesure, la vélocimétrie par image de particules (PIV). Pour finir, nous caractériserons, avec des quantités élémentaires, l'écoulement présent au centre de l'aquarium.

### 2.1 Présentation générale du dispositif expérimental

Des images et schémas du montage expérimental sont représentés aux figures 2.1 et 2.2. Un aquarium de dimension  $1.25 \times 1.25 \times 0.65 \text{ m}^3$  rempli d'eau à hauteur de 0.50 m est installé sur la plate-forme tournante "Gyroflow". Celle-ci est capable d'atteindre une vitesse de rotation  $\Omega$  de 30 tr/min avec des fluctuations relatives inférieures à  $\Delta\Omega/\Omega \sim 0.1 \%$ . Son grand diamètre de 2 m et sa capacité de chargement d'une tonne nous permettent d'y installer confortablement tout le matériel de mesure nécessaire. Nous invitons le lecteur à se référer à la thèse de C. Lamriben [60] pour obtenir plus de détails sur la plate-forme Gyroflow.

On entretient une turbulence stationnaire à l'aide de cinq paires de générateurs de dipôles de tourbillons (soit dix générateurs) placés dans l'aquarium (§ 2.2). L'ensemble des générateurs, orientés en direction du centre de l'aquarium, forme une arène circulaire de 85 cm de diamètre. On mesure la vitesse du fluide directement dans le référentiel tournant à l'aide d'un système de vélocimétrie par images de particules (PIV) embarqué sur la plate-forme. Nous avons fixé un hublot sous la surface de l'eau de manière à pouvoir visualiser l'écoulement par le dessus à travers une surface parfaitement plane (voir figure 2.2 (a)), évitant ainsi les distorsions optiques liées à la déformation de la surface de l'eau.

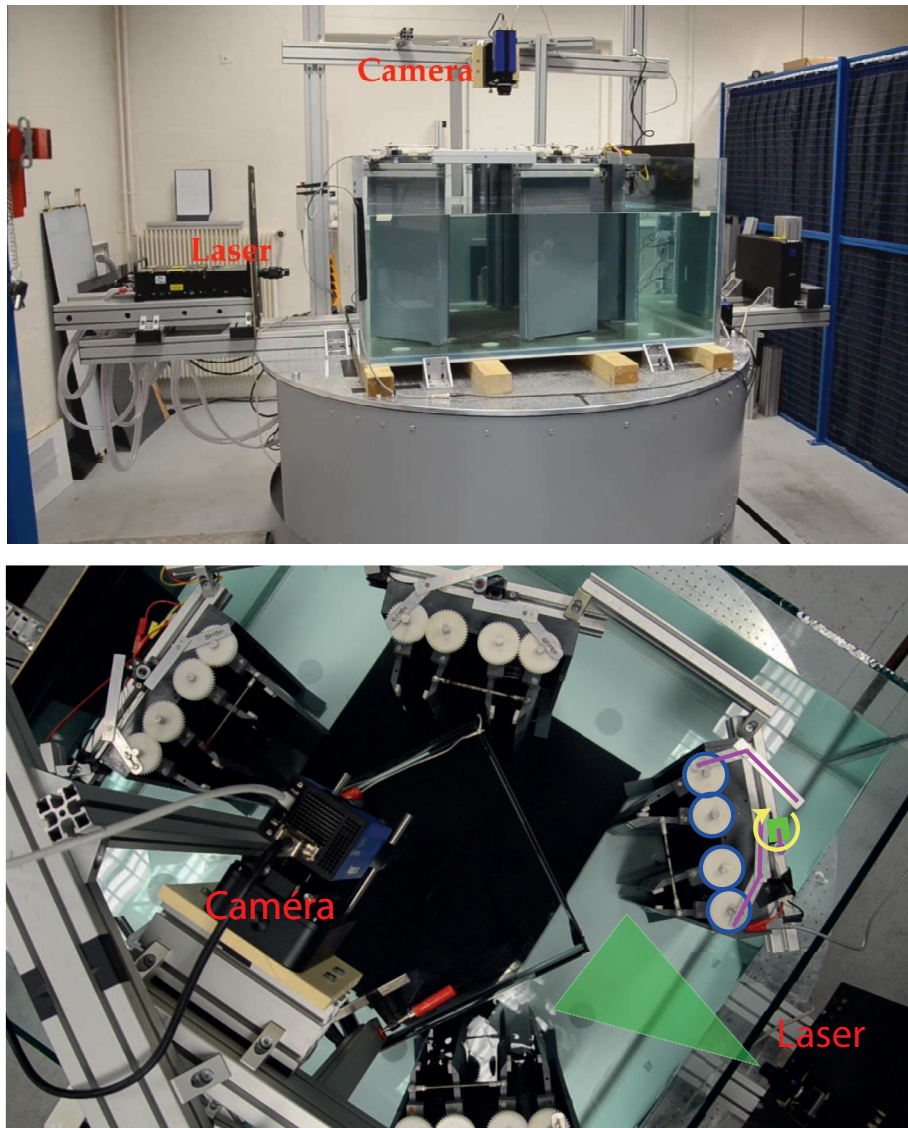
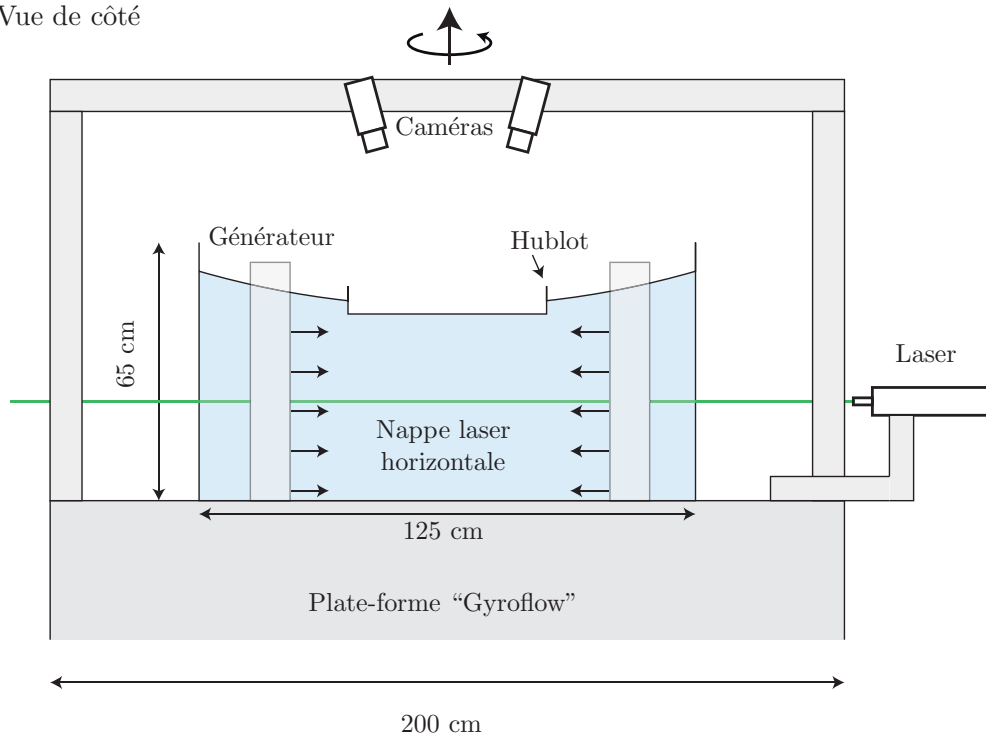


FIGURE 2.1 – Vue d’ensemble du dispositif expérimental de côté (en haut) et de dessus (en bas). Un aquarium de base carré ( $125 \times 125 \text{ cm}^2$ ) rempli avec 50 cm d’eau est posé sur la plateforme “Gyroflow”. Cinq paires de générateurs de tourbillons, orientés vers le centre de l’aquarium et disposés circulairement, entretiennent une turbulence statistiquement stationnaire (une des paires est cachée par la caméra dans l’image du bas). La mise en mouvement des volets des générateurs est réalisée par un moteur (carré vert) et un système de cames (segments violets) et d’engrenages (cercles bleus). On peut aussi voir le laser et une caméra qui permettent de réaliser les mesures de champs de vitesse dans un plan horizontal.

## 2.1. PRÉSENTATION GÉNÉRALE DU DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL

(a) Vue de côté



(b) Vue de dessus

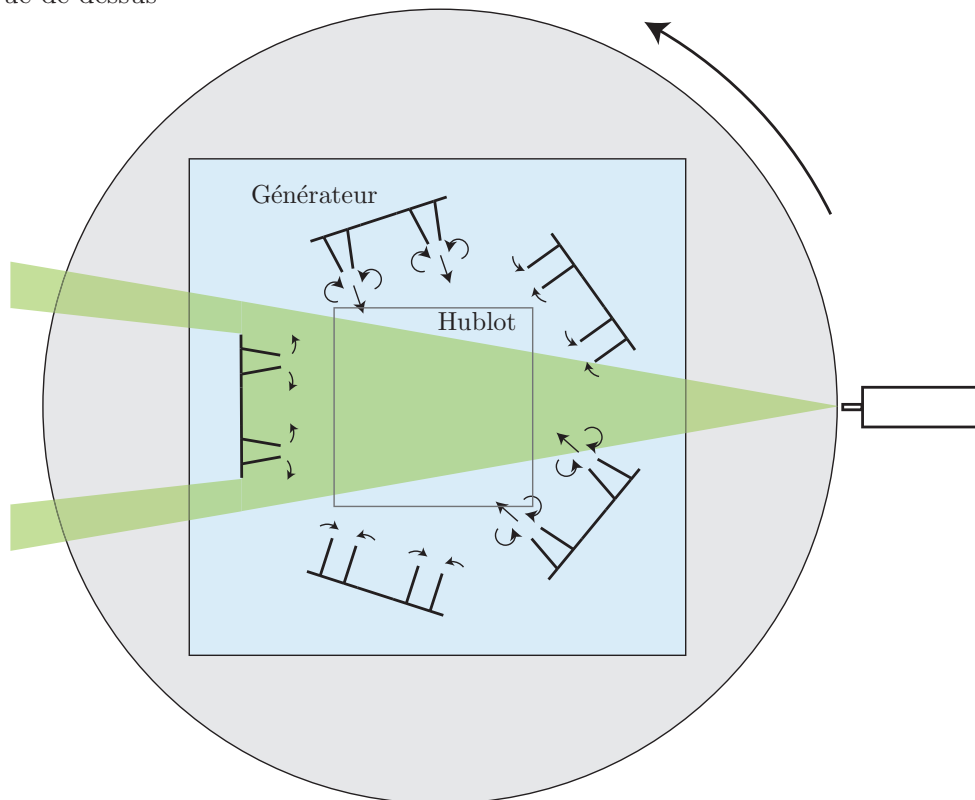


FIGURE 2.2 – Schéma du dispositif expérimental dans la configuration de mesure par vélocimétrie stéréoscopique par images de particules dans un plan horizontal.

## 2.2 Générateurs de dipôles de tourbillons

La turbulence est produite à l'aide de 10 générateurs de dipôles de tourbillons. Ces générateurs ont été conçus au laboratoire LadHyX de l'École polytechnique par Pierre Augier, Paul Billant et Jean-Marc Chomaz qui nous les ont amicalement prêtés. Initialement, ces générateurs ont été élaborés afin d'étudier la stabilité d'un dipôle de tourbillons et la turbulence dans un fluide stratifié [61, 62].

Un générateur est constitué de deux volets de 60 cm de hauteur et de longueur  $L_f = 10$  cm fixés sur une base à l'aide de charnières verticales (figure 2.3 (a)). Ceux-ci se ferment et s'ouvrent périodiquement à l'aide d'un moteur à courant continu et d'un système de cames et d'engrenages que l'on peut apercevoir à la figure 2.1. Le détail d'un cycle de période  $T_0$ , qui est schématisé à la figure 2.2 (b), est le suivant :

1. Les volets sont parallèles et au repos pendant un temps  $0.2T_0$  ;
2. Ils se ferment ensuite durant un temps  $0.2T_0$  d'un angle  $\theta_f$  d'environ  $9^\circ$  par volet, soit à une vitesse angulaire  $\sigma_f = \theta_f/0.2T_0$ . Les deux tourbillons contra-rotatifs sont générés durant cette étape (figure 2.3 (c)) ;
3. Les volets restent alors immobiles pendant un temps de  $0.4T_0$  ;
4. Finalement, les deux volets s'ouvrent pendant un temps de  $0.2T_0$  et retrouvent leur position d'origine.

La période  $T_0$ , qui peut varier de 8.5 à 17 s, a été fixée à 8.5 s pour tous les résultats présentés dans cette thèse. Le système d'entraînement des volets impose que les 2 générateurs d'une même paire soient en phase. Cependant, nous avons veillé à déphaser les 5 paires de générateurs de manière à minimiser les variations temporelles de l'énergie au centre de l'arène. Le nombre de Reynolds basé sur la longueur des volets  $L_f$  et sur la vitesse en bout de volet durant la phase de fermeture  $U_f = \sigma_f L_f = 9.2 \text{ mm s}^{-1}$  est  $Re_f = \sigma_f L_f^2 / \nu = 920$ . L'écoulement généré est un dipôle de tourbillons contra-rotatifs approximativement invariant avec la verticale qui devient rapidement instable et alimente des fluctuations turbulentes 3D [63] comme on peut le voir à la figure 2.3 (d). Ces fluctuations sont advectées vers le centre de l'arène où elles entretiennent un écoulement turbulent statistiquement stationnaire. Le nombre de Rossby basé sur le forçage est faible  $Ro_f = \sigma_f / 2\Omega \in [0.03, 0.22]$  ( $\Omega \in [2, 16]$  tr/min), ce qui indique que l'écoulement généré par le forçage est influencé par la rotation directement à proximité des générateurs.

## 2.3 Mesure des champs de vitesse

La majeure partie de notre étude est basée sur une analyse statistique en deux points réalisée sur le champ de vitesse du fluide. Le calcul des observables statistiques associées nécessite d'accéder à la structure spatiale instantanée de l'écoulement. Pour ce faire, nous mesurons les champs de vitesse avec la technique de vélocimétrie par images de particules en version "monoscopique" (PIV) ou "stéréoscopique" (SPIV). Nous décrirons tout d'abord le principe de la PIV qui permet de mesurer deux composantes du champ de vitesse dans un plan de l'écoulement (2D2C). Puis

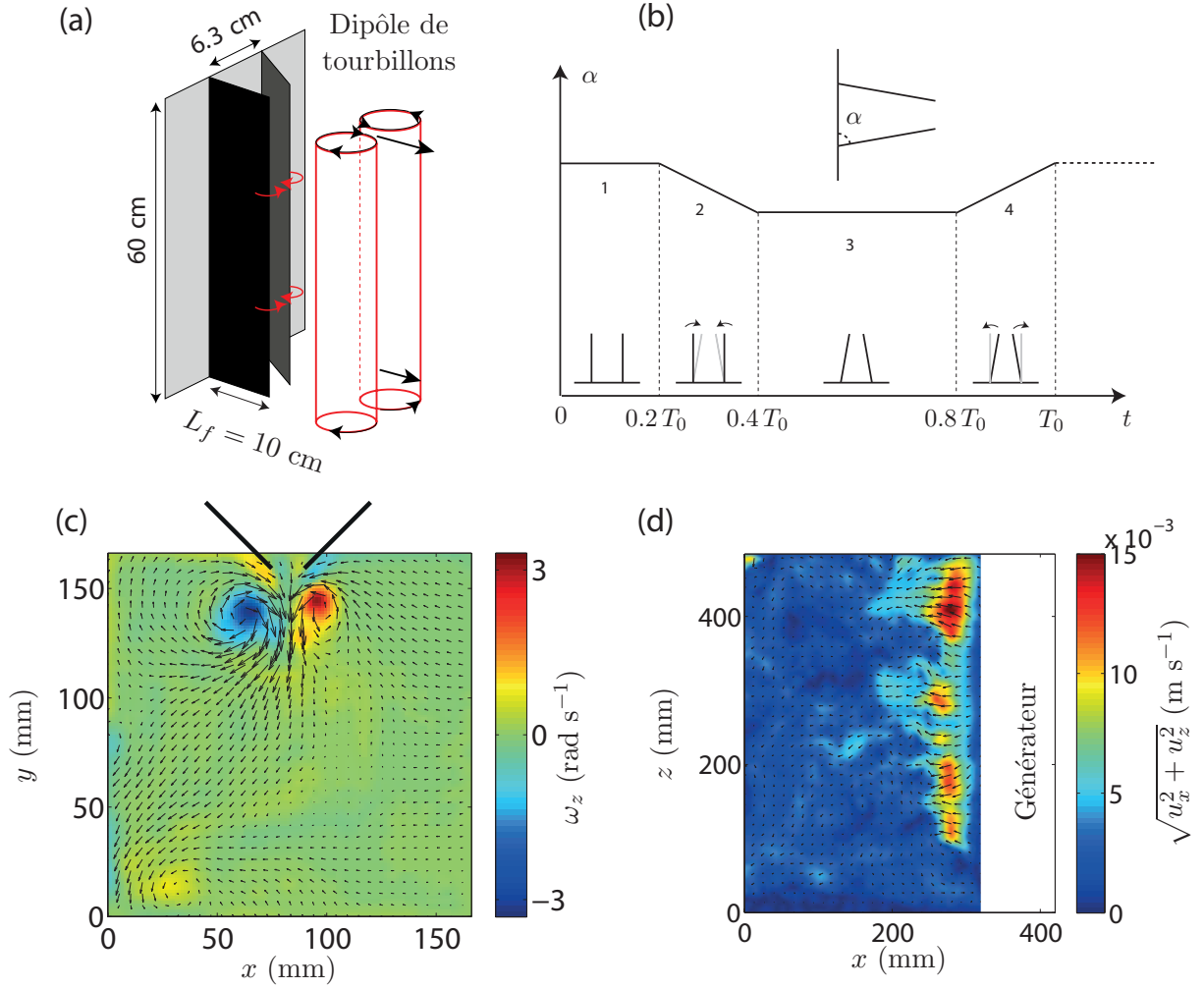


FIGURE 2.3 – (a) Schéma d’un générateur de dipôle de tourbillons. (b) Chronogramme d’un cycle angulaire d’un volet composant un générateur. (c) Champ de vorticité verticale  $\omega_z = \partial_x u_y - \partial_y u_x$  à proximité d’un générateur, mesuré juste après la fermeture des volets et en l’absence de rotation d’ensemble dans un plan horizontal à mi-hauteur d’eau. (d) Champ de vitesse sur presque toute la hauteur d’eau dans le plan vertical passant entre les deux volets et normal au générateur.



nous décrirons la SPIV qui permet de mesurer les trois composantes du champ de vitesse dans un plan (2D3C).

### 2.3.1 Principe de la vélocimétrie par images de particules (PIV)

La PIV repose sur l'analyse d'images de particules en suspension dans le fluide. Afin d'identifier la vitesse des particules à celle du fluide (approximation dite de particules traceurs), on suppose que le temps de réponse  $\tau_p$  des particules est faible devant le temps caractéristique de l'écoulement  $\tau_f$  (ce qui se traduit par un nombre de Stokes faible  $St = \frac{\tau_p}{\tau_f} \ll 1$ ) et que sa taille est faible devant la plus petite échelle de l'écoulement. Une caméra acquiert une série d'images des particules illuminées par une nappe laser (continue ou pulsée en synchronisation avec les prises de vue de la caméra). L'algorithme de PIV calcule alors les champs de vitesse à partir de corrélations entre les images successives (séparées dans le temps d'un intervalle  $\delta t$ ). Les images sont découpées en un quadrillage régulier de fenêtres d'interrogation. L'algorithme détermine alors, pour chaque fenêtre, le déplacement  $\delta \mathbf{x}_{opt}$  qui maximise la corrélation entre deux images successives séparées d'un temps  $\delta t$ . On en déduit la vitesse  $\mathbf{u} = \frac{\delta \mathbf{x}_{opt}}{\delta t}$ , moyennée sur la fenêtre considérée, sur l'épaisseur de la nappe et sur le temps  $\delta t$ . En répétant l'algorithme sur toutes les fenêtres d'interrogation, on obtient le champ de vitesse 2D.

### 2.3.2 Vélocimétrie stéréoscopique par images de particules (SPIV)

La SPIV est, comme la PIV, basée sur la visualisation de traceurs dans une nappe laser. La SPIV permet elle de mesurer les 3 composantes du champ de vitesse en utilisant deux caméras en incidence non normale.

Dans le cas de la PIV, la caméra est placée en incidence normale au plan de mesure : celle-ci n'est donc capable d'accéder qu'à la projection dans le plan de la nappe laser du déplacement des particules. Dans le cas de la SPIV, l'épaisseur de la nappe laser est mise à profit pour suivre les particules non seulement dans le plan de la nappe laser mais aussi dans la direction de son épaisseur. Si on place une caméra en incidence non normale au plan de mesure, le déplacement des particules observé par la caméra sera due aux composantes du déplacement dans le plan laser mais aussi en partie due à la composante perpendiculaire à ce plan. Une seconde caméra observant le plan de mesure sous une autre incidence mesure une autre projection de ce même déplacement. À partir de ces deux projections et d'une calibration préalable de l'espace, on est capable de reconstruire les 3 composantes du champ de vitesse dans le plan de la nappe laser (reconstruction stéréoscopique).

### Focalisation des images

Pour obtenir des images nettes sur tout le champ malgré le fait que les caméras soient placées en incidence non normale, on utilise un dispositif de Scheimpflug. Ce dispositif permet d'incliner le capteur CCD de la caméra par rapport à son objectif (figure 2.4 (b)). Lorsque le plan de mesure, le plan du capteur CCD et le plan de l'objectif se croisent en une même droite, l'image

## 2.3. MESURE DES CHAMPS DE VITESSE

---

est focalisée de manière homogène (loi de Scheimpflug). Les figures 2.4 (a) et (c) représentent des images de la plaque de calibration avec et sans dispositif de Scheimpflug. Sans ce dispositif, l'image n'est nette que sur une fine bande verticale, alors qu'avec, elle est nette partout.

### Calibration

Du fait de la visualisation en incidence non normale, les images obtenues sont distordues (figure 2.4 (c)). Pour pouvoir effectuer la reconstruction stéréoscopique, il est nécessaire d'interpoler les images de chaque caméra sur une même grille cartésienne du plan de mesure. Pour ce faire on acquiert une image par caméra d'une plaque de calibration placée dans le plan de mesure. Cette plaque est constituée d'un motif tridimensionnel dont les dimensions sont parfaitement connues. Il suffit alors de trouver la transformation qui "redresse" l'image de la plaque de calibration telle qu'elle serait observée en incidence normale pour chaque caméra (figure 2.4 (c)-(d)).

### Auto-calibration

L'erreur de mesure sur les vecteurs vitesse est très sensible à la qualité de la calibration. Afin d'affiner celle-ci on réalise une "auto-calibration". Elle consiste à prendre deux images de particules au même instant (une par caméra) et à lui appliquer la transformation déterminée préalablement par la calibration. Si la calibration est réalisée parfaitement les deux images transformées doivent être identiques. L'auto-calibration consiste à utiliser l'algorithme de PIV entre ces 2 images. Il en résulte un champ de déplacement qui permet d'affiner la transformation d'image donnée par la calibration.

### 2.3.3 Matériel utilisé et séries de mesure

Le matériel utilisé se compose de :

1. un laser Nd :Yag (longueur d'onde : 532 nm) pulsé double cavité (énergie :  $2 \times 140$  mJ/pulse). En sortie du laser, on place une lentille cylindrique de manière à créer une nappe laser d'environ 1 mm d'épaisseur ;
2. une caméra CCD double frame "Imager pro plus",  $2048 \times 2048$  pix<sup>2</sup>, 14 bit ;
3. une caméra CCD double frame "Flow master 3S",  $1280 \times 1024$  pix<sup>2</sup>, 12 bit ;
4. particules de verre creuses "Sphericel 110P8" de diamètre  $d_p = 10$   $\mu$ m et de masse volumique  $\rho_p = 1.1$  g.cm<sup>-3</sup>. La taille des particules est environ 60 fois plus faible que la plus petite échelle de notre écoulement (échelle de Kolmogorov  $\eta \simeq 0.6$  mm). Le nombre de Reynolds basé sur le diamètre des particules et sur la vitesse typique de l'écoulement ( $\sim 1$  cm s<sup>-1</sup>) est d'environ  $10^{-1}$  si bien que l'écoulement autour de la particule peut être considéré comme un écoulement de Stokes. Le temps de réponse de nos particules aux mouvements du fluide peut alors être estimé comme  $\tau_p = \frac{\rho + 2\rho_p}{\rho} \frac{d_p^2}{36\nu} \simeq 8 \cdot 10^{-6}$  s [65]. En évaluant le temps caractéristique de l'écoulement à partir des caractéristiques du forçage  $\tau_f = \frac{L_f}{U_f} \simeq 10$  s on obtient un nombre de Stokes de l'ordre de  $10^{-6} \ll 1$ . Il est à noter

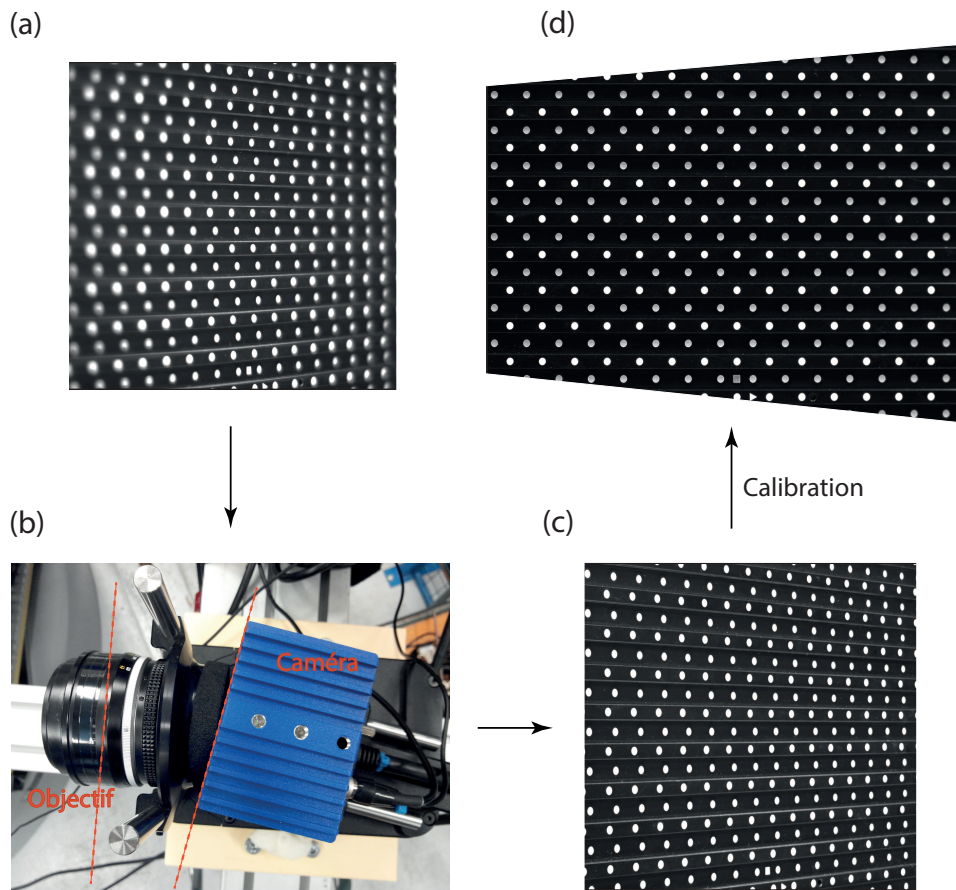


FIGURE 2.4 – (a) Image de la plaque de calibration prise avec un angle d'incidence de  $45^\circ$  sans dispositif de Scheimpflug. On observe que l'image est nette sur la zone centrale mais floue sur les bords. (b) Dispositif de Scheimpflug qui permet d'introduire un angle entre l'optique et la caméra. Lorsque le plan de mesure, le plan du capteur CCD de la caméra et le plan de l'objectif se croisent en une unique droite, l'image acquise par la caméra est nette partout. (c) Image de la plaque de calibration prise avec le même point de vue que l'image (a) mais avec un dispositif de Scheimpflug. (d) Image (c) sur laquelle on a appliqué la transformation issue de la calibration.

## 2.4. CARACTÉRISATION DE L'ÉCOULEMENT

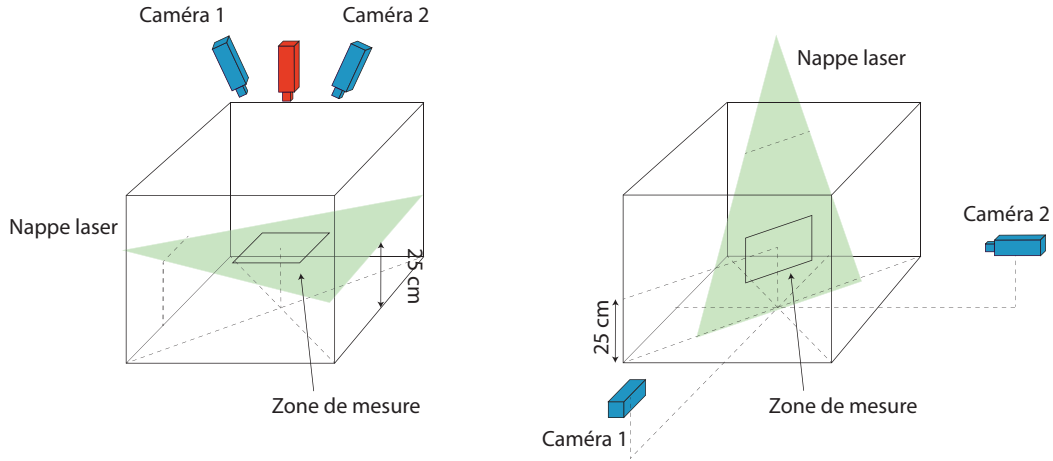


FIGURE 2.5 – À gauche : schémas des dispositifs de mesures de PIV (caméra rouge) et de SPIV (caméras bleues) dans un plan horizontal. À droite : schéma du dispositif de mesure de SPIV dans le plan vertical. Par soucis de clarté, les générateurs de tourbillons ne sont pas représentés ici.

cependant qu'un écoulement turbulent contient une large gamme d'échelles temporelles i.e. une large gamme de valeurs pour le nombre de Stokes. Au chapitre 4, nous verrons que les structures associées aux fréquences supérieures à 1 Hz ne contiennent qu'une part très négligeable de l'énergie. Les structures énergétiques de notre écoulement (de temps caractéristique supérieur à la seconde) sont donc associées à un nombre de Stokes inférieur à  $10^{-5} \ll 1$ . Nos particules constituent donc des bons traceurs de l'écoulement.

Le laser et les caméras sont synchronisées par un ordinateur embarqué sur la plate-forme tournante. L'acquisition des images et le calcul des champs de vitesse sont réalisés à l'aide du logiciel commercial "DaVis" (LaVision) et les post-traitements sous Matlab.

Dans les expériences présentées dans cette thèse, nous avons réalisé des mesures PIV (série A, voir tableau 2.1) mais l'essentiel des mesures a été réalisé avec la technique de SPIV (séries B, C et D). Les mesures ont été réalisées dans un plan horizontal à mi-hauteur d'eau et dans un plan vertical contenant une diagonale de l'aquarium (cf. fig. 2.5). Les paramètres de toutes les expériences réalisées avec ce dispositif expérimental sont rassemblées dans le tableau 2.1. Tous les calculs ont été réalisés sur des fenêtres d'interrogations de taille  $32 \times 32$  pixels<sup>2</sup> avec un recouvrement en surface des fenêtres de 50 % et un temps  $\delta t = 50$  ms entre les deux images d'un doublet.

## 2.4 Caractérisation de l'écoulement

Cette section a pour but de caractériser l'écoulement présent au centre de l'arène à partir de l'observation des champs de vitesse mesurés par SPIV et de quantités statistiques en un point.

	Série A	Série B	Série C	Série D
$\Omega$ (tr/min)	0 à 20	0 à 16	0 à 16	
Plan de mesure	horizontal		vertical	
Fréquence d'acquisition $f_{acq}$ (Hz)	1	0.35	0.35	1.5
Taille des champs (cm <sup>2</sup> )	28 × 28	12 × 12	14 × 14	
Résolution spatiale (mm)	2.1	1.15	1.75	
Nombre de champs $N$	3 600		10 000	1 000
Technique de mesure	PIV	SPIV	SPIV	
Chapitres concernés	2	2 et 3	2, 3 et 4	2 et 4

TABLE 2.1 – Paramètres des expériences.

### 2.4.1 Champs de vitesse typiques

La figure 2.6 représente des champs de vitesse typiques mesurés au centre de l'arène formée par les générateurs dans un plan horizontal et vertical pour  $\Omega = 0$  et 16 tr/min.

Dans le cas non tournant, la taille typique des structures visibles est cinq à dix fois plus petite que le champ de mesure, que ce soit dans le plan horizontal ou vertical. Dans le cas tournant ( $\Omega = 16$  tr/min), le champ horizontal montre un grand tourbillon de dimension comparable au champ de mesure. On constate que la taille typique des structures les plus énergétiques est bien plus grande en présence de rotation. Le champ de vitesse verticale montre, quant à lui, une invariance marquée selon la direction verticale avec toutefois de légères variations à petite échelle. En rotation, notre écoulement s'organise ainsi en grandes structures tourbillonnaires presque invariantes selon l'axe de rotation. De telles structures ont été observées pour la première fois expérimentalement par Hopfinger *et al.* [33]. La croissance de l'extension horizontale des structures turbulentes et leur tendance à la bidimensionnalisation ont depuis été mises en évidence dans de nombreuses expériences et simulations [23, 33–39]. Elles constituent deux propriétés importantes de la turbulence en rotation. Nous quantifierons ces effets au chapitre 3 à travers la distribution d'énergie dans l'espace des échelles.

La figure 2.7 représente des champs de vitesse typiques mesurés dans un plan horizontal (les mêmes que dans la figure 2.6) colorés soit en norme de la vitesse horizontale  $(u_x^2 + u_y^2)^{1/2}$ , soit en valeur absolue de la composante verticale de la vitesse  $|u_z|$ , pour  $\Omega = 0$  et 16 tr/min. En l'absence de rotation, on remarque que les structures horizontales associées aux vitesses horizontales et verticales sont similaires. En revanche, pour  $\Omega = 16$  tr/min, on remarque que la vitesse verticale s'organise en structures allongées assez fines. De part l'invariance verticale observée à la figure 2.6, on en déduit que la vitesse verticale s'organise en feuillets invariants selon l'axe de rotation. La vitesse horizontale s'organise, quant à elle, en larges structures tourbillonnaires. Nous avons vu au chapitre 1 que dans la limite où l'écoulement est quasi-2D, la vitesse verticale n'intervient plus dans la dynamique de l'écoulement. Elle est alors un scalaire passif advecté par l'écoulement horizontal. C'est le processus d'étirement-repliement que subit la vitesse verticale par l'écoulement horizontal qui forme ces feuillets.

## 2.4. CARACTÉRISATION DE L'ÉCOULEMENT

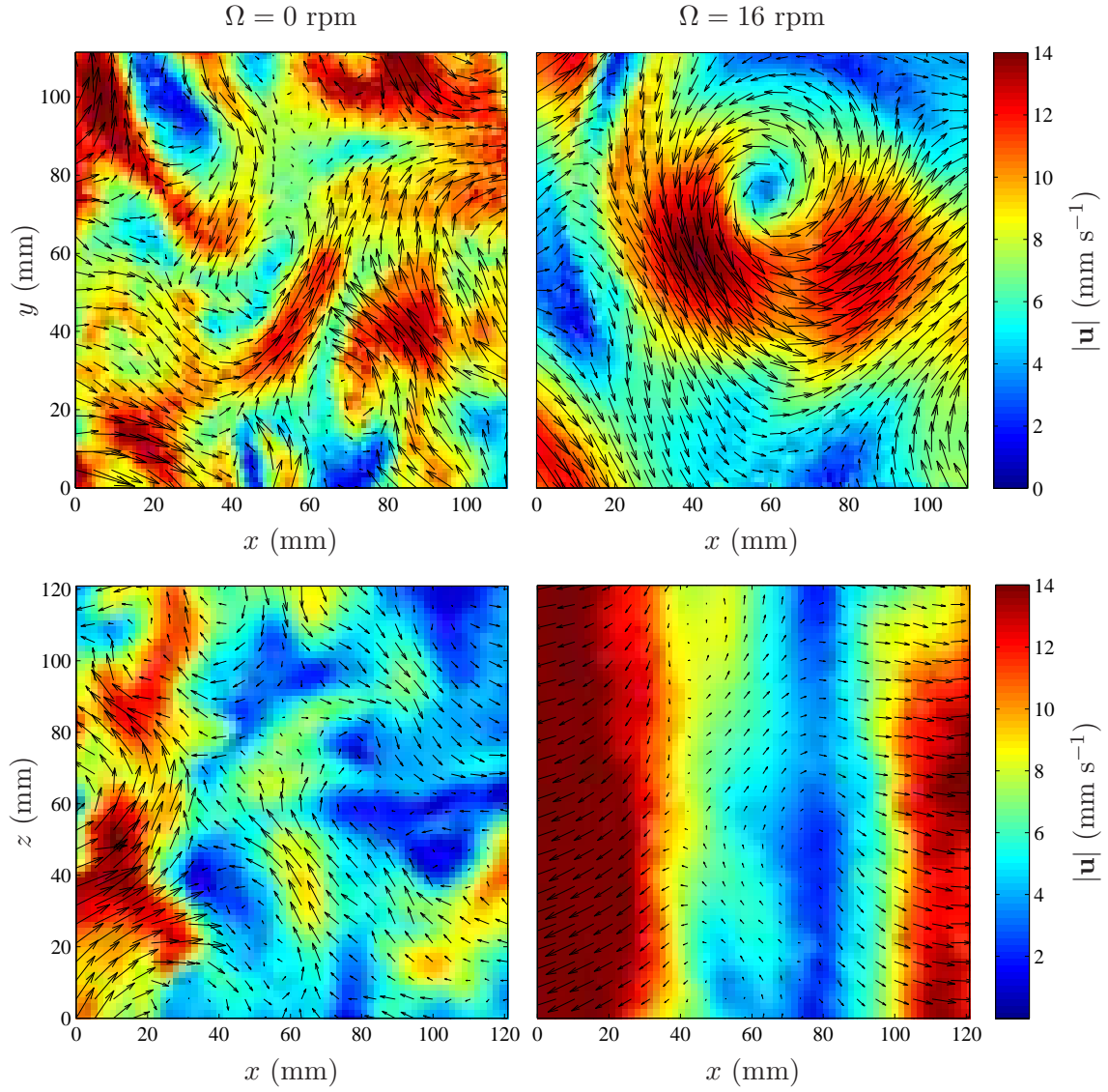


FIGURE 2.6 – Champs de vitesse typiques dans le plan horizontal (en haut) et dans le plan vertical (en bas) pour  $\Omega = 0$  et 16 tr/min. La couleur représente la norme du champ de vitesse  $|\mathbf{u}| = (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)^{1/2}$ .



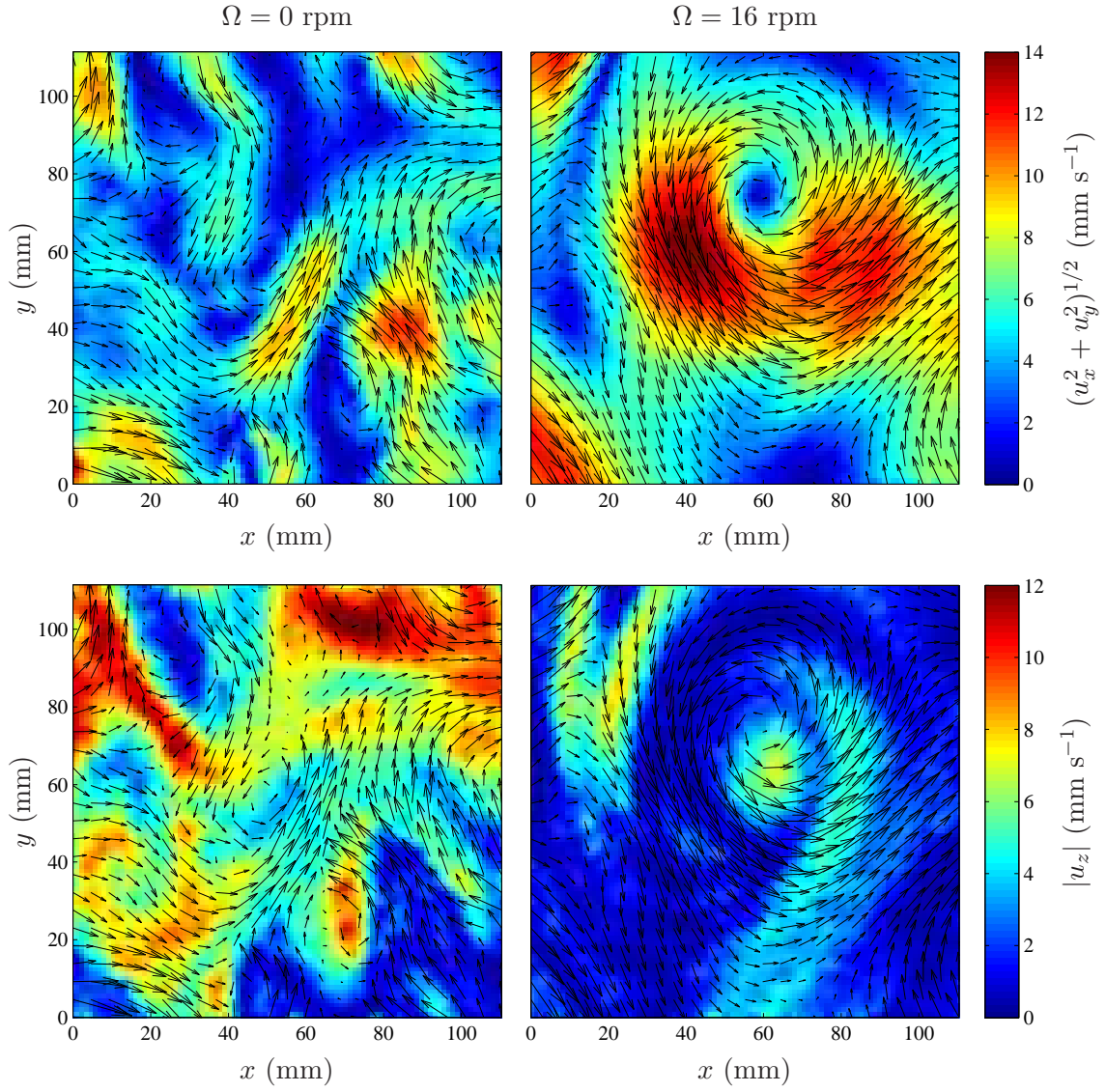


FIGURE 2.7 – Champs de vitesse typiques dans le plan horizontal pour  $\Omega = 0$  et 16 tr/min. Les champs du haut et du bas sont identiques, seul le fond coloré diffère. La couleur représente la norme du champ de vitesse horizontale  $(u_x^2 + u_y^2)^{1/2}$  en haut et la valeur absolue de la vitesse verticale  $|u_z|$  en bas.

## 2.4. CARACTÉRISATION DE L'ÉCOULEMENT

---

### 2.4.2 Variations temporelles de la vitesse

La figure 2.8 représente les trois composantes de la vitesse mesurées au centre de l'aquarium en fonction du temps pour  $\Omega = 0$  et 16 tr/min. On remarque que la vitesse fluctue de manière “chaotique” autour d’une valeur moyenne (en rouge). Cette moyenne temporelle de la vitesse est du même ordre de grandeur que ses fluctuations en l’absence de rotation. À l’opposé, elle est très faible pour  $\Omega = 16$  tr/min. L’importance de la partie reproductible (écoulement moyen) et de la partie non reproductible (fluctuations) de l’écoulement sera discutée à partir de la mesure du taux de turbulence dans la suite de ce chapitre.

En l’absence de rotation, l’amplitude des fluctuations est d’environ  $0.01 \text{ m s}^{-1}$  pour les composantes horizontales et environ de moitié pour la vitesse verticale. Pour  $\Omega = 16$  tr/min, l’amplitude des fluctuations des composantes horizontales de la vitesse est quatre fois plus élevée que celle des fluctuations de la composante verticale. En rotation, l’énergie est ainsi principalement contenue dans les composantes perpendiculaires à l’axe de rotation. Nous quantifierons dans la suite de ce chapitre l’effet de la rotation sur la répartition de l’énergie entre les différentes composantes à travers les termes du tenseur de corrélation de vitesse en un point.

Pour  $\Omega = 16$  tr/min, on remarque que les “bouffées” les plus énergétiques des composantes horizontales de la vitesse se font sur une durée de l’ordre de la minute. En l’absence de rotation, elles ne durent au contraire que quelques secondes : la rotation d’ensemble s’accompagne ainsi de l’apparition de basses fréquences. Au contraire, la vitesse verticale se concentre à de plus hautes fréquences à  $\Omega = 16$  tr/min qu’à  $\Omega = 0$ . Ceci est lié au caractère passif de la vitesse verticale à forte rotation qui s’organise en feuillets fins (voir figure 2.7) advectés par la vitesse horizontale. Il en résulte une structuration spatiale à petite échelle qui se traduit par de rapides variations temporelles de la vitesse mesurée en un point. La rotation d’ensemble affecte ainsi fortement la distribution fréquentielle d’énergie. Nous discuterons de ce point en détail à travers les spectres temporels de l’énergie dans le chapitre 4.

### 2.4.3 Taux de turbulence

Notre forçage étant en périphérie de l’arène, l’énergie cinétique présente au centre ne peut être apportée que par un flux spatial. On peut alors se demander si ce flux est lié à l’advection des structures turbulentes par un écoulement reproductible ou non. Nous supposons dans toute la suite de ce manuscrit de thèse que notre turbulence est statistiquement stationnaire, c’est à dire que toute quantité statistique moyennée sur des réalisations indépendantes ne dépend pas du temps. En conséquence, nous nous permettrons de faire l’hypothèse d’ergodicité : la moyenne temporelle de toute quantité sera assimilée à une moyenne d’ensemble sur des réalisations indépendantes. La partie reproductible de notre écoulement sera donc associée à sa partie stationnaire. Afin d’extraire cette partie reproductible de l’écoulement que nous appellerons écoulement moyen, nous effectuons une décomposition de Reynolds sur le champ de vitesse

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \overline{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t), \quad (2.1)$$



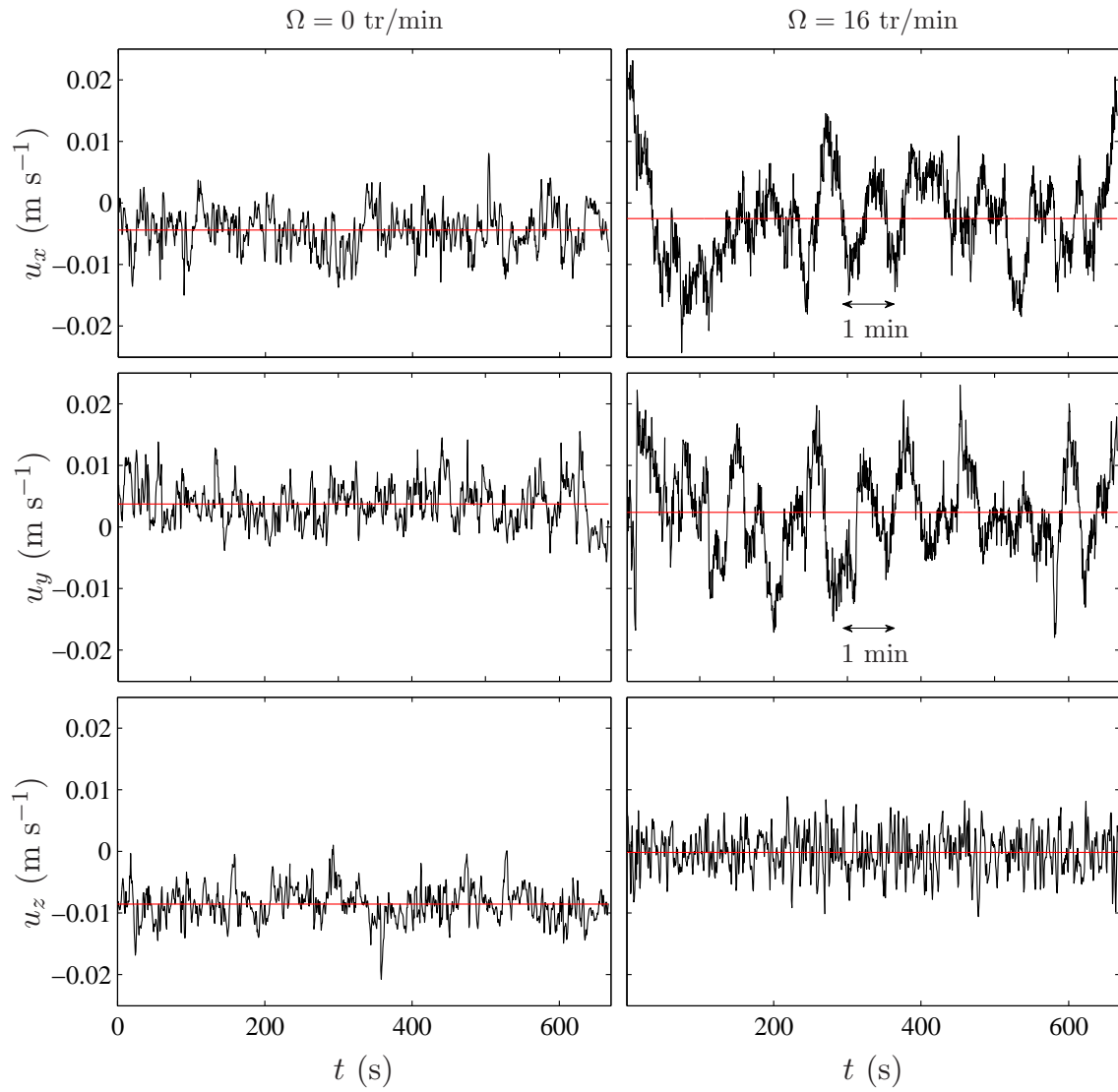


FIGURE 2.8 – Composantes de la vitesse  $\mathbf{u}$  mesurées en un point (choisi au centre de l'expérience) en fonction du temps. Les droites rouges représentent leur moyenne temporelle respective.

## 2.4. CARACTÉRISATION DE L'ÉCOULEMENT

$\Omega$ (tr/min)	0	2	4	8	12	16
$k/K$	0.48	0.79	0.89	0.95	0.94	0.97
$\gamma$	0.17	0.15	0.06	0.05	0.04	0.10
$Re$	140	230	350	420	400	330
$Ro$	$\infty$	0.30	0.20	0.13	0.087	0.068

TABLE 2.2 – Paramètres de l'écoulement à différents taux de rotation  $\Omega$  : taux de turbulence  $k/K$ , facteur d'inhomogénéité  $\gamma$ , nombre de Reynolds  $Re$  et nombre de Rossby  $Ro$  turbulents. Ces chiffres ont été calculés à partir des mesures de PIV stéréoscopiques dans le plan horizontal (expériences de la série B, voir tableau 2.1). Ces quantités sont définies dans le texte.

où  $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$  représente l'écoulement moyen et  $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)$  la partie turbulente de l'écoulement. On peut alors calculer les énergies cinétiques turbulente  $k = \langle \overline{\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)^2} \rangle_{\mathbf{x}}/2$  et totale  $K = \langle \overline{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)^2} \rangle_{\mathbf{x}}/2$  tels que  $K = \langle \overline{\mathbf{u}(\mathbf{x})^2} \rangle_{\mathbf{x}} + k$ ,  $\langle \cdot \rangle_{\mathbf{x}}$  et  $\bar{\cdot}$  correspondant respectivement à une moyenne spatiale et temporelle. Le taux de turbulence  $k/K$  est reporté au tableau 2.2. Il vaut environ 50 % en l'absence de rotation et croît rapidement avec  $\Omega$  pour atteindre 97% au plus fort taux de rotation. Lorsqu'il y a une rotation d'ensemble, l'énergie est ainsi principalement apportée au centre de l'arène par les structures turbulentes qui s'auto-advectent et non par un écoulement moyen qui advecte les fluctuations. Nous reviendrons sur cette question des flux spatiaux d'énergie liés aux inhomogénéités des fluctuations turbulentes au chapitre 3. L'écoulement étant essentiellement non reproductible dans la cas tournant, nous nous concentrerons sur la partie turbulente de l'écoulement  $\mathbf{u}'$  dans la suite de cette section.

### 2.4.4 Homogénéité

Notre forçage par les bords associé à un flux spatial qui advecte l'énergie vers le centre est nécessairement associé à une statistique inhomogène, c'est à dire que toutes les quantités statistiques dépendent de la position à laquelle elles sont mesurées. Nous allons quantifier cette inhomogénéité dans la zone étudiée à partir de la moyenne temporelle *locale* de l'énergie cinétique turbulente  $k(\mathbf{x}) = \overline{\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)^2}/2$  (tel que  $k = \langle k(\mathbf{x}) \rangle_{\mathbf{x}}$ ). La figure 2.9 représente  $k(\mathbf{x})$  normalisé par son maximum spatial. Dans le cas non tournant, l'énergie est répartie de manière inhomogène,  $k(\mathbf{x})/\max(\mathbf{k}(\mathbf{x}))$  variant de 0.4 à 1. Pour  $\Omega = 16$  tr/min, l'énergie se répartie de manière un peu plus homogène,  $k(\mathbf{x})/\max(\mathbf{k}(\mathbf{x}))$  variant de 0.6 à 1. On mesure le degré d'inhomogénéité par la déviation standard spatiale de l'énergie cinétique turbulente

$$\gamma = \frac{\langle [k(\mathbf{x}) - k]^2 \rangle_{\mathbf{x}}^{1/2}}{k}, \quad (2.2)$$

avec  $\gamma = 0$  pour un champ homogène. Les valeurs de ce degré d'inhomogénéité  $\gamma$  sont reportées dans le tableau 2.2. On observe que, même si notre turbulence est toujours inhomogène ( $\gamma \in [0.04, 0.17]$ ), le degré d'inhomogénéité est plus bas à grand taux de rotation. Nous verrons au chapitre 3 que même si ces inhomogénéités sont raisonnablement faibles, elles jouent un rôle

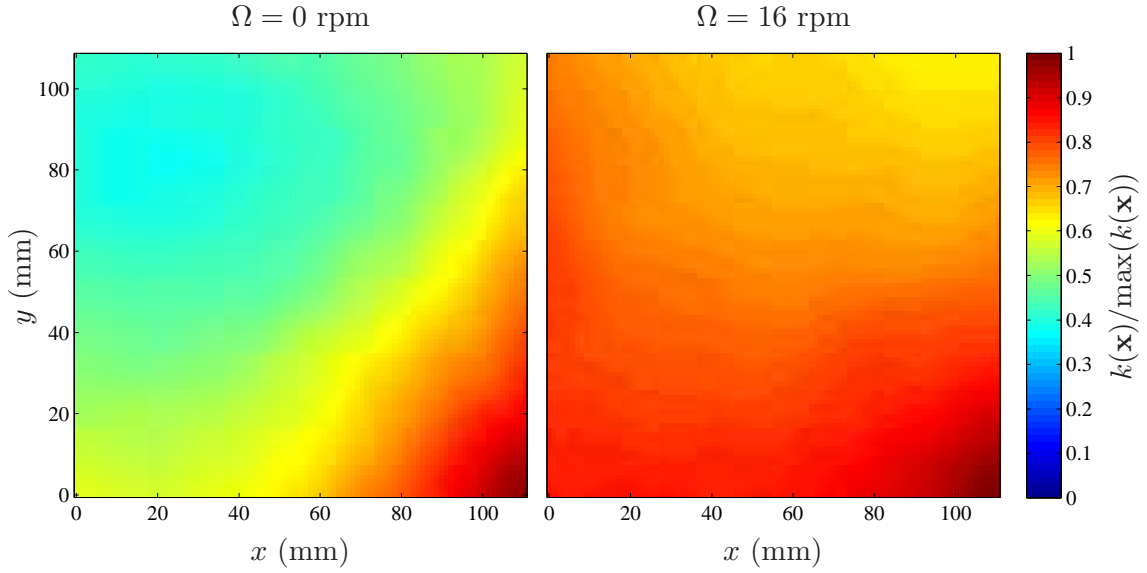


FIGURE 2.9 – Carte dans le plan horizontal de la moyenne temporelle de l'énergie cinétique turbulente  $k(\mathbf{x}) = \overline{\mathbf{u}'(\mathbf{x}, \mathbf{t})^2}/2$  normalisée par son maximum spatial.

crucial dans l'injection d'énergie dans la zone de contrôle étudiée.

### 2.4.5 Nombres sans dimension

Une première caractérisation élémentaire du régime d'un écoulement turbulent en rotation peut se faire à travers ses nombres de Reynolds et de Rossby basés sur la vitesse horizontale turbulente typique  $U_{\perp, \text{rms}} = \langle (u_x'^2 + u_y'^2)^{1/2} \rangle_{\mathbf{x}}$  et sur l'échelle intégrale horizontale  $L_{\perp}$  définis comme :

$$Re = \frac{U_{\perp, \text{rms}} L_{\perp}}{\nu}, \quad (2.3)$$

$$Ro = \frac{U_{\perp, \text{rms}}}{2\Omega L_{\perp}}. \quad (2.4)$$

Le calcul de l'échelle  $L_{\perp}$  nécessite une analyse en deux points. Elle sera définie et discutée en détail au chapitre 3. Les valeurs des nombres de Reynolds et de Rossby sont reportées dans le tableau 2.2. Quand la plateforme est en rotation, le nombre de Rossby est de l'ordre de l'unité ou plus petit ( $Ro \in [0.068, 0.30]$ ) avec un nombre de Reynolds compris entre 230 et 420. Le nombre Rossby est comparable à ceux des écoulements géo/astrophysiques et des précédentes expériences de turbulence forcée soumises à une rotation d'ensemble [33, 34, 52, 54, 57, 66, 67].

Ces nombres de Rossby de l'ordre de l'unité ou un ordre de grandeur plus petit indiquent qu'il y a un fort couplage entre la force de Coriolis et les non linéarités de l'écoulement. L'écoulement se trouve bien dans le régime de turbulence en rotation défini au chapitre 1 pour ce qui est du

## 2.4. CARACTÉRISATION DE L'ÉCOULEMENT

---

nombre de Rossby. En revanche, les nombres de Reynolds atteints expérimentalement ne sont pas très élevés. Cette modération est principalement liée à deux contraintes : la plateforme ne peut tourner infiniment vite et le nombre de Rossby doit être d'ordre 1 ou inférieur pour que la rotation ait un effet sur l'écoulement. En conséquence, il est nécessaire de restreindre l'amplitude des fluctuations turbulentes. On pourrait évidemment générer une turbulence associée à un nombre de Reynolds nettement plus grand, mais ses fluctuations ne seraient alors plus sensibles à la rotation, i.e. le nombre de Rossby deviendrait lui aussi grand devant 1.

### 2.4.6 Componentalité

Nous avons vu que la rotation a tendance à rendre les écoulements invariants selon l'axe de rotation (vertical). Dans la limite 2D, la vitesse verticale est un scalaire passif advecté par l'écoulement horizontal. La vitesse verticale s'organise alors en fins feuillets et se dissipe fortement contrairement à la vitesse horizontale qui s'organise en grands tourbillons (voir figure 2.7). Ceci contribue à diminuer la part relative d'énergie contenue dans la vitesse verticale à mesure que la rotation augmente. Toutefois, l'existence d'une paroi inférieure et supérieure (hublot de visualisation) dans notre expérience donne lieu à des couches limites visqueuses appelées couches d'Ekman. Celles-ci génèrent une vitesse verticale proportionnelle à la composante verticale de la vorticité  $\omega_z = \partial_x u_y - \partial_y u_x$  à la paroi et contribuent à augmenter la part relative d'énergie contenue dans la vitesse verticale.

La vitesse verticale se comporte très différemment de la vitesse horizontale en turbulence en rotation, il est alors intéressant d'étudier la répartition d'énergie entre les composantes de la vitesse. Pour ce faire, nous mesurons la moyenne spatiale du tenseur des corrélations de vitesse en un point,  $\langle \overline{u'_i u'_j} \rangle_{\mathbf{x}}$  (la trace de ce tenseur vaut deux fois l'énergie cinétique turbulente). Pour une turbulence 3D isotrope, les 3 termes diagonaux sont égaux à  $\frac{2}{3}k$ . Pour une turbulence axisymétrique par rapport à  $Oz$ , on a  $\langle \overline{u'^2_x} \rangle_{\mathbf{x}} = \langle \overline{u'^2_y} \rangle_{\mathbf{x}} \neq \langle \overline{u'^2_z} \rangle_{\mathbf{x}}$  avec tous les termes non diagonaux nuls. Sur la figure 2.10 on voit que la turbulence est quasi-axisymétrique, avec  $\langle \overline{u'^2_x} \rangle_{\mathbf{x}} \simeq \langle \overline{u'^2_y} \rangle_{\mathbf{x}}$  à 3% près dans la cas tournant et à 10% près sans rotation, les trois composantes non diagonales étant chacune au moins vingt fois plus faibles que  $\langle \overline{u'^2_x} \rangle_{\mathbf{x}}$  pour les expériences en rotation. Ici, la turbulence n'est jamais isotrope, même dans le cas non tournant pour lequel on a  $\langle \overline{u'^2_x} \rangle_{\mathbf{x}} \simeq \langle \overline{u'^2_y} \rangle_{\mathbf{x}} \simeq 2 \langle \overline{u'^2_z} \rangle_{\mathbf{x}}$ . Ce n'est en fait pas étonnant puisque les générateurs de dipôles de tourbillons, de part leur mouvement, privilégient une injection d'énergie dans les composantes horizontales du champ de vitesse. L'énergie contenue dans la composante verticale  $\langle \overline{u'^2_z} \rangle_{\mathbf{x}}$  reste pratiquement constante avec  $\Omega$  alors que  $\langle \overline{u'^2_x} \rangle_{\mathbf{x}}$  et  $\langle \overline{u'^2_y} \rangle_{\mathbf{x}}$  croissent rapidement puisaturent à  $\Omega = 8$  rpm. À grande vitesse de rotation, l'énergie cinétique verticale représente environ 10% de l'énergie cinétique totale.

### 2.4.7 Asymétrie cyclone/anticyclone

Un autre effet bien connu des écoulements en régime de turbulence en rotation est l'asymétrie cyclone/anticyclone qui désigne une prédominance des structures qui tournent dans le même sens que la rotation d'ensemble (cyclones) sur celles qui tournent dans le sens opposé. Les expériences

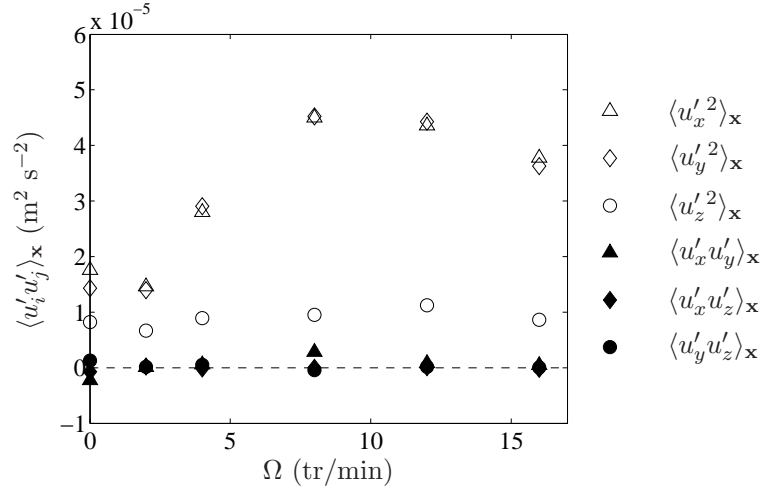


FIGURE 2.10 – Composantes du tenseur des corrélations de vitesse en un point  $\langle \overline{u'_i u'_j} \rangle_{\mathbf{x}}$  (avec  $(i, j) \in (x, y, z)$ ) en fonction du taux de rotation  $\Omega$ . Les termes non diagonaux sont presque nuls et l'égalité  $\langle u'^2_x \rangle_{\mathbf{x}} \simeq \langle u'^2_y \rangle_{\mathbf{x}}$  indique une turbulence statistiquement axisymétrique.

présentées dans cette thèse (série de mesure A, voir tableau 2.1) ont aussi été le support d'une étude de cette asymétrie cyclone/anticyclone à laquelle j'ai participé. Ce travail a donné lieu à la publication B. Gallet, A. Campagne, P.-P. Cortet et F. Moisy, Physics of Fluids, 2014 [64]. Cette étude étant cependant en premier lieu le fruit du travail de post-doctorat de Basile Gallet, je n'en présente qu'un résumé ci-dessous.

L'asymétrie cyclone/anticyclone peut se caractériser à travers la mesure de la composante verticale de la vorticité  $\omega_z = \mathbf{e}_z \cdot \boldsymbol{\omega}$  (avec  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ ) dont le signe indique le caractère cyclonique ou anticyclonique des structures turbulentes (positif pour cyclonique et négatif pour anticyclonique). La figure 2.11 représente des champs typiques de vorticité verticale turbulente  $\omega'_z$  pour  $\Omega = 0$  et 16 rpm. On remarque effectivement que, en rotation, les structures tourbillonnaires les plus intenses ( $|\omega'_z| \simeq 5 \text{ rad s}^{-1}$ ) sont préférentiellement cycloniques et ont une taille typique de 25 mm. En l'absence de rotation, la vorticité maximale est concentrée à des échelles plus faibles et ne montre pas de préférence entre les cyclones et les anticyclones.

La figure 2.12 (a) représente la fonction de densité de probabilité de la vorticité verticale turbulente  $P\{\omega'_z\}$  à différents taux de rotation. On voit qu'elle est symétrique et piquée en  $\omega'_z = 0$  dans le cas non tournant et se dissymétrise à mesure que le taux de rotation augmente, avec l'apparition de plus en plus longues queues de vorticité cyclonique. Sous une forte rotation ( $\Omega = 20 \text{ rpm}$ ), la vorticité cyclonique est cent fois plus probable que la vorticité anticyclonique pour les fortes vorticités ( $|\omega'_z| > 5 \text{ rad s}^{-1}$ ), tandis qu'à faible vorticité, elles sont équiprobables. On remarque que l'asymétrie est ainsi concentrée aux fortes valeurs de la vorticité qui correspondent aux tourbillons cohérents de grande taille observés à la figure 2.11 (droite) et dont la densité spatiale est assez faible ( $P\{\omega'_z\} < 10^{-2} P\{0\}$ ). L'asymétrie cyclone-anticyclone peut se quantifier à travers le paramètre d'asymétrie (*skewness* en anglais) de cette distribution de

## 2.4. CARACTÉRISATION DE L'ÉCOULEMENT

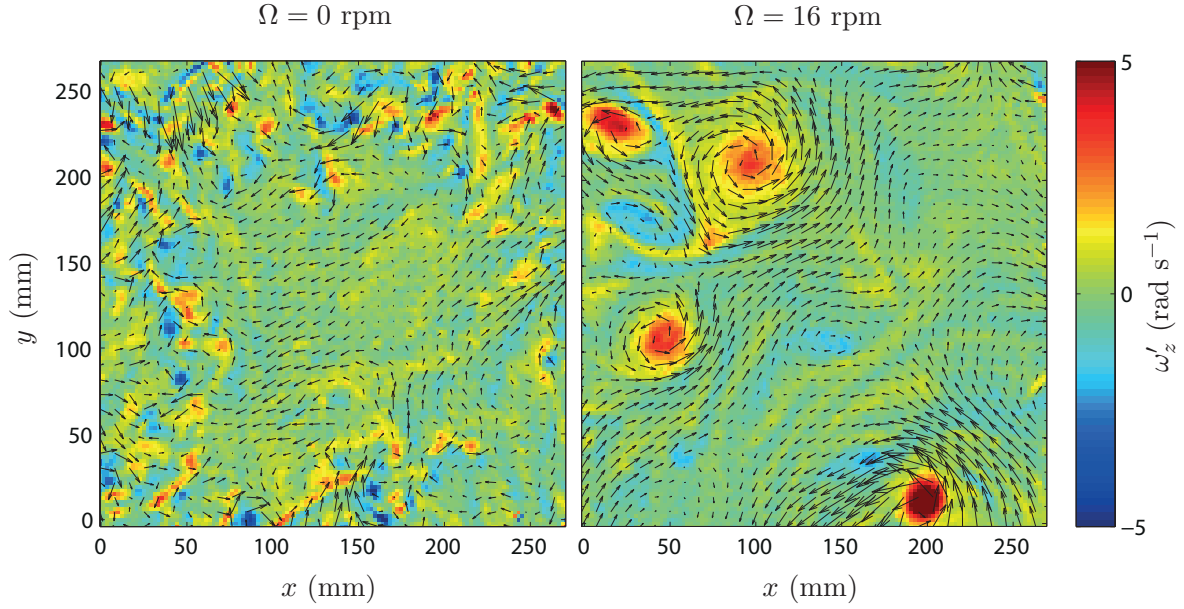


FIGURE 2.11 – Champs de vorticité verticale turbulente  $\omega'_z = \partial_x u'_y - \partial_y u'_x$  typiques dans le plan horizontal pour  $\Omega = 0$  (à gauche) et 16 rpm (à droite). Ces champs sont issus des expériences de la série A, voir tableau 2.1

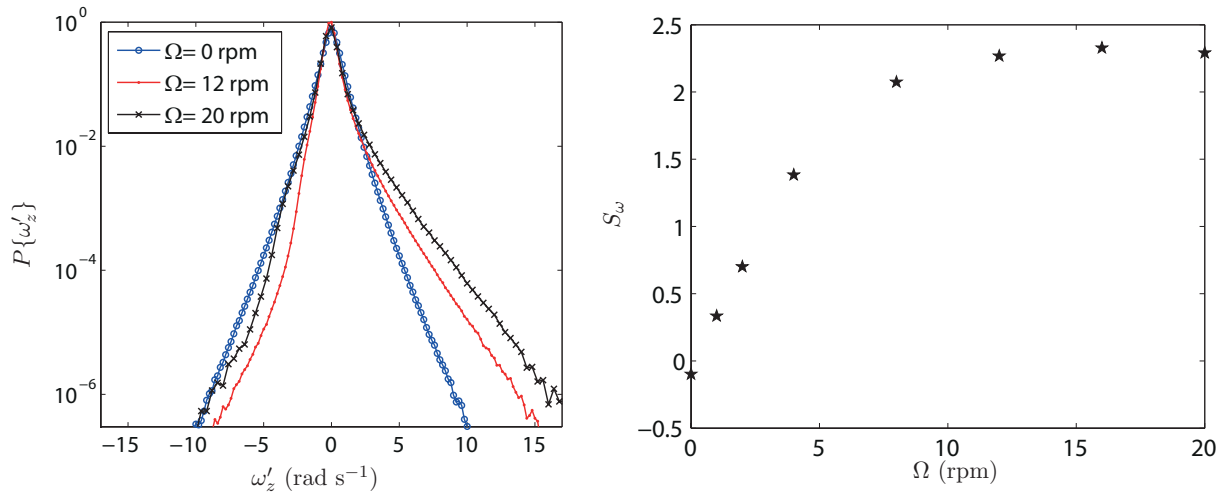


FIGURE 2.12 – À gauche, fonction de densité de probabilité de la composante verticale de la vorticité turbulente  $\omega'_z$  à différents taux de rotation  $\Omega$ . À droite, paramètre d'asymétrie (skewness) de la vorticité turbulente verticale  $S_\omega = \langle \omega'^3_z \rangle / \langle \omega'^2_z \rangle^{3/2}$

## CHAPITRE 2. DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL ET CARACTÉRISATION BASIQUE DE L'ÉCOULEMENT

---

vorticité verticale  $S_\omega$  défini comme :

$$S_\omega = \frac{\langle \omega_z'^3 \rangle_{\mathbf{x}}}{\langle \omega_z'^2 \rangle_{\mathbf{x}}^{3/2}}. \quad (2.5)$$

La figure 2.12 (b) représente  $S_\omega$  en fonction du taux de rotation  $\Omega$ . On remarque que le paramètre d'asymétrie est quasi nul sans rotation puis croît rapidement avec le taux de rotation et semble saturer à une valeur de l'ordre de 2. Ces valeurs sont comparables à celles observées dans de précédentes expériences [43, 53, 68] et des simulations numériques [41, 69] de turbulence en déclin soumise à une rotation d'ensemble.

Le paramètre d'asymétrie de la vorticité constitue l'observable la plus évidente pour caractériser l'asymétrie cyclone/anticyclone. Cependant, la vorticité mesurée étant évaluée par différence finie sur les champs de vitesse, elle mesure en réalité une vorticité filtrée à l'échelle de notre résolution. Elle ne coïncide avec la vorticité réelle que si les champs de vitesse mesurés résolvent les plus petites échelles de l'écoulement. En turbulence 3D isotrope, l'ordre de grandeur de la plus petite échelle présente est donné par l'échelle de Kolmogorov  $\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$  ( $\varepsilon$  est le taux massique de dissipation d'énergie). Dimensionnellement, on peut évaluer le taux de dissipation d'énergie à l'aide des caractéristiques de notre forçage  $\varepsilon \sim U_f^3/L_f \simeq 8 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}$ . Cette estimation de l'échelle de Kolmogorov dans notre écoulement donne 0.6 mm et est ainsi environ trois fois plus faible que notre résolution spatiale indiquant que notre estimation de la vorticité par différence finie doit être affectée seulement par de faibles effets de lissage spatial. La résolution actuelle des caméras des systèmes de PIV permettent de résoudre typiquement deux décades d'échelles, ce qui est souvent largement insuffisant pour étudier toute la gamme d'échelles d'un écoulement turbulent : l'expérimentateur doit donc choisir entre résoudre les plus petites ou les plus grandes échelles de son écoulement turbulent.

Nous avons alors proposé de caractériser l'asymétrie cyclone/anticyclone à partir de moments d'ordre 3 des corrélations antisymétriques de vitesse en deux points (le lecteur est invité à lire l'article [64] pour plus de détails). La vitesse étant une quantité bien moins sensible aux effets de résolution finie, ces corrélations présentent l'avantage de l'être aussi. Mais l'aspect le plus intéressant de ces corrélations est que l'analyse en deux points permet de sonder l'intensité de l'asymétrie en fonction de l'échelle considérée, ce que la vorticité ne permet pas de capter. Nous avons ainsi mis en évidence dans notre expérience, qu'en présence de rotation, ces corrélations sont maximales à des échelles comprises entre 24 et 50 mm, soit la taille typique des cœurs de cyclones les plus intenses de la figure 2.11. L'utilisation de ces corrélations pourraient s'avérer très intéressantes pour caractériser l'asymétrie cyclone/anticyclone dans des mesures océanographiques et atmosphériques où il est très difficile de résoudre les petites échelles mais aussi et surtout de mettre en évidence l'échelle à laquelle l'asymétrie est la plus intense.

## Chapitre 3

# Distribution et transferts d'énergie entre échelles

### 3.1 Introduction

En présence d'une rotation globale, les écoulements ont tendance à devenir invariants selon l'axe de rotation avec l'émergence d'un mode 2D énergétique. Il est alors intéressant de décomposer le champ de vitesse en une contribution 2D invariante selon l'axe de rotation et une contribution 3D. La contribution 3D est a priori associée à une cascade directe d'énergie et la contribution 2D à une cascade inverse dans le plan perpendiculaire à l'axe de rotation. Il se pose alors naturellement la question de la direction moyenne des transferts d'énergie dans une telle turbulence.

Les transferts d'énergie entre échelles en turbulence en rotation ont été beaucoup étudiés numériquement dans des systèmes de taille finie aux conditions aux limites périodiques et où l'énergie est injectée à un nombre d'onde fixé  $k_f$  grâce à une force volumique [22, 44–50, 70]. Globalement, ces simulations révèlent l'émergence d'une cascade inverse d'énergie lorsque la rotation s'intensifie. Elles indiquent également que l'existence et l'intensité de cette cascade inverse dépendent non seulement du nombre de Rossby mais aussi de la nature du forçage, c'est à dire, de sa dimensionalité (2D, 3D), de sa componentialité (2C, 3C), ainsi que de son hélicité  $\iiint \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} d^3V$  [29, 49]. Un autre paramètre clef est le confinement vertical : lorsque le rapport de la hauteur du domaine sur l'échelle d'injection diminue, ce qui revient à s'approcher géométriquement du cas 2D avec une extension spatiale verticale très faible devant les extensions spatiales horizontales, le nombre de Rossby critique en dessous duquel une cascade inverse apparaît croît [22, 44, 50].

En revanche, les études expérimentales sur les transferts sont peu nombreuses, principalement à cause des difficultés techniques associées à la mesure directe des flux d'énergie entre échelles. Ces flux ne peuvent être mesurés qu'à travers le moment d'ordre trois des incréments de vitesse en deux points qui nécessite d'accumuler une grande quantité de données pour converger.

Des preuves indirectes ont été apportées par Baroud *et al.* [52] en turbulence forcée et par



Morize *et al.* [53] en turbulence en déclin qui ont observé un changement de signe du moment d'ordre trois des incréments de vitesse longitudinaux  $S_3$  dans le plan normal à l'axe de rotation. Le changement de signe de  $S_3$  ne peut cependant pas être interprété de manière univoque comme un transfert inverse d'énergie pour une turbulence anisotrope. Plus récemment, Yarom *et al.* [54] ont apporté des preuves d'une cascade inverse en observant l'évolution du spectre d'énergie dans le régime transitoire d'une turbulence forcée en rotation. Cependant, de part le caractère à la fois instationnaire et inhomogène de l'écoulement, il n'est pas possible de distinguer les transferts d'énergie mesurés à une position donnée du transport spatial d'énergie depuis le dispositif de forçage vers l'aire de mesure.

L'objectif principal de ce chapitre est d'étudier l'effet de la rotation d'ensemble sur les transferts d'énergie entre échelles à travers leur mesure directe. Nous étudierons tout d'abord la distribution d'énergie entre échelles, et notamment son anisotropie, à travers le moment d'ordre deux des incréments de vitesse. Les transferts d'énergie échelle à échelle seront ensuite mesurés à travers la divergence du moment d'ordre trois des incréments de vitesse. Nous décrirons enfin la conservation de l'énergie échelle à échelle et notamment l'injection d'énergie dans notre aire de contrôle à partir de la généralisation inhomogène de l'équation de Kármán-Howarth-Monin [15].

### 3.2 Distribution d'énergie entre échelles

La distribution d'énergie entre échelles peut être évaluée dans l'espace spectral ou physique. Dans cette thèse, nous faisons le choix d'aborder l'analyse en échelle dans l'espace physique. Cette analyse sera basée sur les statistiques des différences de vitesse entre deux points espacés de l'échelle orientée d'intérêt  $\mathbf{r}$ , appelées incréments de vitesse et notées  $\delta\mathbf{u}$  (§ 3.2.1). Nous évaluerons la distribution d'énergie entre échelles à travers le moment d'ordre deux de ces incréments de vitesse (§ 3.2.2).

Dans l'approche spectrale, la distribution d'énergie est évaluée comme la norme au carré de la transformée de Fourier spatiale des champs de vitesse. Les champs de vitesse obtenus à l'issue de mesures expérimentales ou d'une simulation numérique possèdent une résolution spatiale  $\delta x$  et une longueur  $L_e$  finie. Prendre la transformée de Fourier d'un tel signal consiste à le décomposer sur les modes de Fourier de vecteurs d'ondes  $\mathbf{k}$  de norme comprise entre  $k_{\min} = 2\pi/L_e$  et  $k_{\max} = \pi/\delta x$ . Cette méthode est naturellement adaptée aux simulations numériques directes de turbulence homogène dont les équations du mouvement sont résolues dans l'espace spectral. Les mesures expérimentales, quant à elles, ne permettent souvent pas de résoudre les plus petites échelles et/ou sont de dimensions trop faibles pour contenir les plus grandes échelles. Les structures de l'écoulement de nombres d'ondes inférieurs à  $k_{\min}$  ou supérieurs à  $k_{\max}$  sont alors décomposées sur les modes de nombres d'ondes compris dans  $[k_{\min}, k_{\max}]$ , ce qui vient polluer la mesure de la distribution d'énergie. Dans notre expérience, nous avons réglé le système de PIV afin de résoudre assez correctement les petites échelles. Il en résulte des champs de vitesse de dimensions (typiquement  $10 \times 10 \text{ cm}^2$ ) plus faibles que les plus grandes structures présentes dans l'écoulement (voir chapitre 2). L'approche spectrale spatiale n'est donc pas judicieuse ici.

## 3.2. DISTRIBUTION D'ÉNERGIE ENTRE ÉCHELLES

---

### 3.2.1 Incréments de vitesse et moyenne spatiale

L'analyse en échelle dans l'espace physique nécessite de considérer des quantités en deux points. À partir de deux points A et B aux positions respectives  $\mathbf{x}_A$  et  $\mathbf{x}_B$ , on définit le vecteur séparation  $\mathbf{r}$  et la position moyenne  $\mathbf{X}$  comme

$$\mathbf{r} = \mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A \quad \text{et} \quad \mathbf{X} = \frac{\mathbf{x}_A + \mathbf{x}_B}{2}. \quad (3.1)$$

Dans la suite,  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{X}$  seront exprimés dans la base cartésienne  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  ou cylindrique  $(\mathbf{e}_\perp, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\parallel)$  avec  $\mathbf{e}_\parallel = \mathbf{e}_z$ . L'outil de base sur lequel notre analyse en échelle repose est l'incrément de vitesse  $\delta\mathbf{u}$  centré sur la position  $\mathbf{X}$ , pour la séparation  $\mathbf{r}$  et au temps  $t$

$$\delta\mathbf{u}(\mathbf{X}, \mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_B(\mathbf{X}, \mathbf{r}, t) - \mathbf{u}_A(\mathbf{X}, \mathbf{r}, t), \quad (3.2)$$

$$= \mathbf{u}(\mathbf{x}_B = \mathbf{X} + \mathbf{r}/2, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_A = \mathbf{X} - \mathbf{r}/2, t). \quad (3.3)$$

Dans un contexte de turbulence (statistiquement) homogène, les moyennes statistiques ne dépendent pas de la position  $\mathbf{X}$ . Une moyenne spatiale, c'est à dire sur  $\mathbf{X}$ , permet alors d'augmenter la statistique d'ensemble. Lorsque la turbulence est inhomogène, les moyennes statistiques dépendent au contraire de la position moyenne  $\mathbf{X}$ . Dans ce cas, un flux d'énergie spatial (en  $\mathbf{X}$ ) cohabite avec le flux d'énergie entre échelles (en  $\mathbf{r}$ ), dans le bilan global d'énergie à la position  $\mathbf{X}$  et pour l'incrément  $\mathbf{r}$ . Nous verrons à la section 3.4 qu'une moyenne spatiale sur une zone de contrôle bien définie en  $\mathbf{X}$  permet d'interpréter ce flux spatial comme un terme source/puits d'énergie pour la zone de contrôle.

Par la suite, les quantités statistiques basées sur les incréments de vitesse seront moyennées sur toutes les positions  $\mathbf{X}$  présentes dans une surface de contrôle  $S_X$  de dimensions  $\ell_X \times \ell_X$  incluse dans le champ de vitesse mesuré (voir figure 3.1). Cette moyenne sera symbolisée par  $\langle \cdot \rangle_{\mathbf{X}}$ . Les échelles  $\mathbf{r}$  accessibles à travers cette moyenne spatiale sur  $\mathbf{X}$  sont alors celles pour lesquelles les positions  $\mathbf{x}_A$  et  $\mathbf{x}_B$  sont comprises dans le champ de mesure pour toutes les valeurs de  $\mathbf{X}$  appartenant à la zone de contrôle  $S_X$ . La taille de la zone de contrôle  $\ell_X$  est donc liée à l'échelle maximale  $r_{\max}$  à laquelle on souhaite accéder et à la taille du champs  $\ell_C$  à travers

$$r_{\max} + \ell_X = \ell_C. \quad (3.4)$$

Puisque la valeur de  $\ell_X$  décroît quand  $r_{\max}$  augmente (et inversement), la statistique décroît si l'on augmente l'échelle maximale à laquelle on souhaite accéder. Le choix de  $r_{\max}$  est donc issu d'un compromis entre l'échelle maximale accessible et la statistique. La mesure de la distribution d'énergie sera réalisée à partir du moment d'ordre deux des incréments de vitesse dont la convergence statistique est peu exigeante. C'est pourquoi nous fixerons  $r_{\max}$  à une valeur assez importante de 80 mm. Cependant, lorsque nous traiterons des transferts d'énergie entre échelles, mesurés à partir du moment d'ordre trois des incréments de vitesse (sections 3.3 et 3.4), nous limiterons à  $r_{\max} = 50$  mm car la convergence statistique est alors beaucoup plus exigeante.

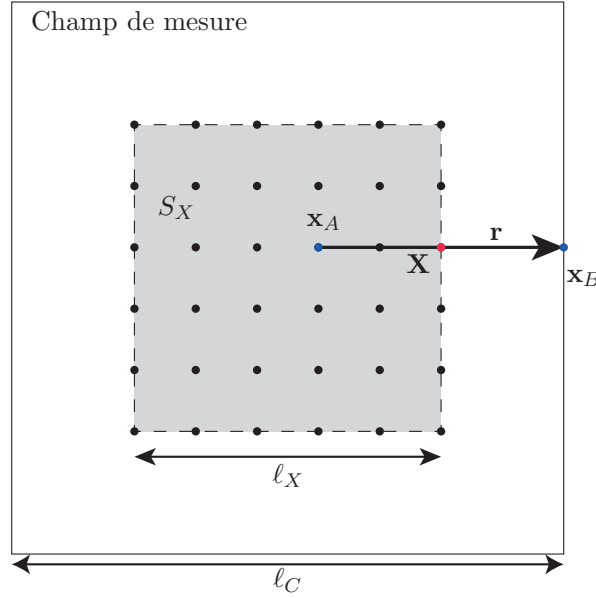


FIGURE 3.1 – Schéma représentant la zone de contrôle  $S_X$  (grisée). Les échelles accessibles à travers une moyenne spatiale sur  $\mathbf{X}$  sont celles pour lesquelles  $\mathbf{x}_A$  et  $\mathbf{x}_B$  sont compris dans le champ de mesure pour toutes les valeurs de  $\mathbf{X}$  dans  $S_X$ . Un vecteur séparation dont la norme vaut  $r_{\max} = \ell_C - \ell_X$  est représenté sur le schéma.

### 3.2.2 Moment d'ordre deux des incréments de vitesse

On caractérise la distribution d'énergie entre échelles par la fonction de structure d'ordre deux, définie comme la variance des incréments centrés de la vitesse turbulente :

$$E(\mathbf{r}) = \langle \overline{(\delta \mathbf{u}')^2} \rangle_{\mathbf{X}}. \quad (3.5)$$

$E$  est nul pour  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$  et vaut  $\mathcal{K}(\mathbf{r}) = \langle \overline{\mathbf{u}_A'^2(\mathbf{X}, \mathbf{r}, t) + \mathbf{u}_B'^2(\mathbf{X}, \mathbf{r}, t)} \rangle_{\mathbf{X}}$  pour  $|\mathbf{r}|$  grand devant la plus grande échelle de l'écoulement. Pour une turbulence homogène,  $\mathcal{K}(\mathbf{r})$  est indépendant de  $\mathbf{r}$  et égal à quatre fois l'énergie cinétique turbulente  $k$ . Au vu de ces deux propriétés, on devine que  $E$  contient l'information d'une énergie cumulée en échelle. Sa moyenne sur une sphère de rayon  $r$ ,

$$\mathcal{E}(r) = \frac{1}{4\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} E(r, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (3.6)$$

peut ainsi s'interpréter comme l'énergie contenue dans les structures de taille inférieure à  $r$  si  $r$  est grand devant l'échelle de dissipation visqueuse [1, 2]. Ici  $(r, \theta, \varphi)$  correspondent aux coordonnées sphériques, avec  $\theta$  l'angle polaire entre  $\mathbf{e}_z$  et  $\mathbf{r}$ , et  $\varphi$  l'angle azimutal entre  $\mathbf{e}_x$  et  $\mathbf{r}$ . Pour une turbulence isotrope,  $E(\mathbf{r})$  est égal à  $\mathcal{E}(|\mathbf{r}|)$  et correspond donc à l'énergie cumulée de 0 à  $|\mathbf{r}|$ . Pour une turbulence anisotrope,  $E(\mathbf{r})$  contient toujours l'information sur l'énergie cumulée

### 3.2. DISTRIBUTION D'ÉNERGIE ENTRE ÉCHELLES

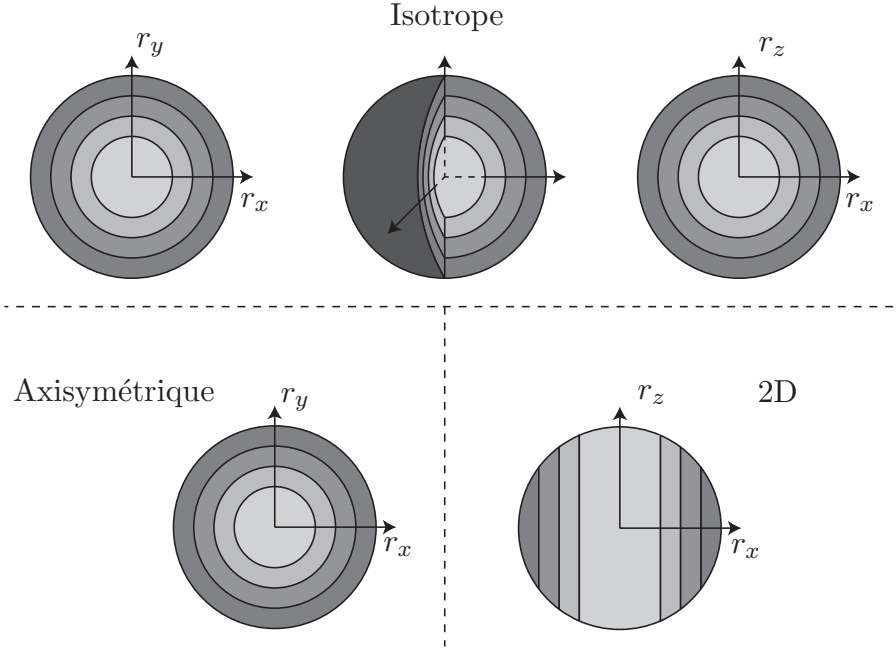


FIGURE 3.2 – Représentation des surfaces de niveau pour une turbulence isotrope, axisymétrique et 2D.

à travers sa moyenne angulaire mais aussi l'information sur l'anisotropie de la répartition de l'énergie entre échelles à travers la forme de ses surfaces de niveau. Les surfaces de niveau de  $E(\mathbf{r})$  sont des sphères pour une turbulence isotrope, invariantes par rotation autour de l'axe ( $Oz$ ) pour une turbulence axisymétrique et invariantes par translation selon  $r_z$  pour une turbulence 2D (figure 3.2).

La figure 3.3 représente des coupes dans le plan horizontal ( $r_x, r_y$ ) et vertical ( $r_x, r_z$ ) de la distribution d'énergie normalisée  $E(\mathbf{r})/E_0$  pour les expériences réalisées à  $\Omega = 0$  et 16 tr/min avec  $E_0 = \mathcal{K}(r = r_{\max}, \theta, \varphi)$  ( $r_{\max} = 80$  mm). Cette normalisation a été choisie telle que  $E(r = r_{\max}, \theta = \pi/2, \varphi)/E_0 = 1$  quand une décorrélation exacte de  $\mathbf{u}'_A(r = r_{\max}, \theta = \pi/2, \varphi)$  et  $\mathbf{u}'_B(r = r_{\max}, \theta = \pi/2, \varphi)$  est observée. Notons qu'en normalisant  $E(\mathbf{r})$  par  $E_0 = \mathcal{K}(r = r_{\max}, \theta, \varphi)$  ou par  $4k = \mathcal{K}(\mathbf{0})$ , le résultat diffère en pratique de moins de 3%. Cette faible différence est liée à la faible dépendance de  $\mathcal{K}(\mathbf{r})$  avec  $\mathbf{r}$  qui traduit le fait que notre turbulence est faiblement inhomogène vis-à-vis de l'énergie.

#### Distribution d'énergie dans le plan horizontal

Dans les coupes horizontales de la figure 3.3, on remarque que les courbes de niveau sont quasi-circulaires avec ou sans rotation d'ensemble, indiquant que notre turbulence est axisymétrique autour de l'axe ( $Oz$ ). Aux échelles les plus grandes considérées,  $E/E_0$  atteint 0.98 dans le cas sans rotation, indiquant que la quasi-totalité de l'énergie est contenue dans des structures d'extension horizontale inférieure à 80 mm. Pour  $\Omega = 16$  tr/min,  $E/E_0$  n'atteint en revanche

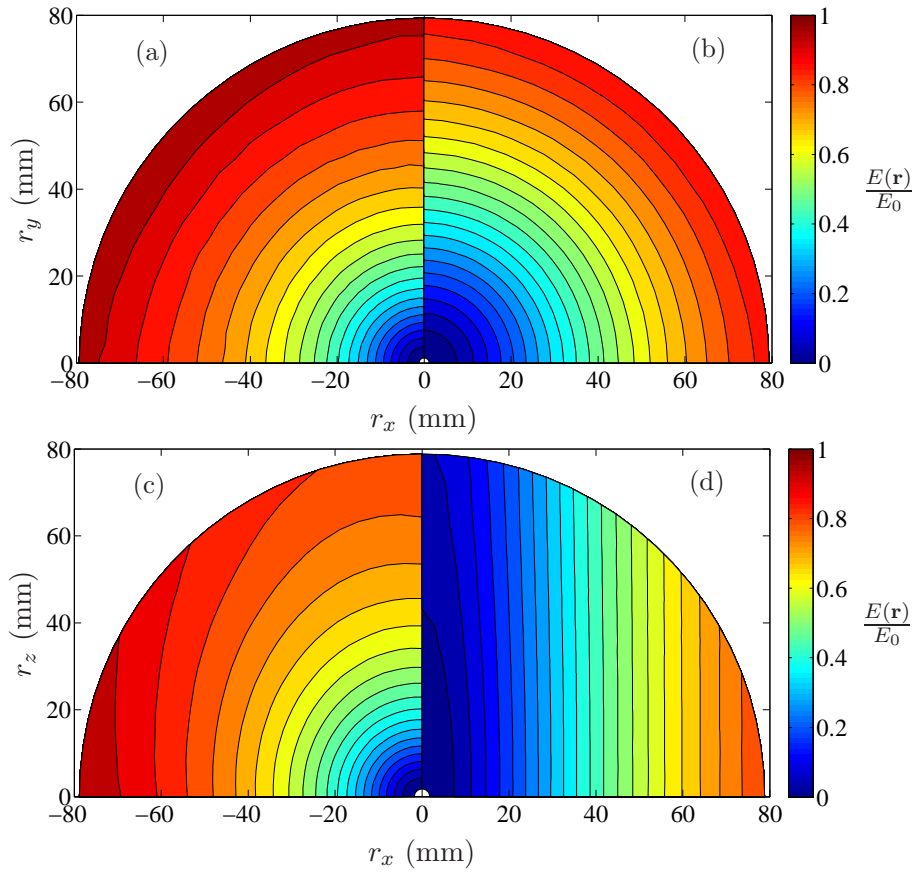


FIGURE 3.3 – Distribution d'énergie entre échelles normalisée  $E(\mathbf{r})/E_0$ , (a,b) dans le plan horizontal  $(r_x, r_y)$  et (c,d) dans le plan vertical  $(r_x, r_z)$ . (a) et (c) correspondent aux expériences à  $\Omega = 0$ , et (b) et (d) à  $\Omega = 16$  tr/min.

### 3.2. DISTRIBUTION D'ÉNERGIE ENTRE ÉCHELLES

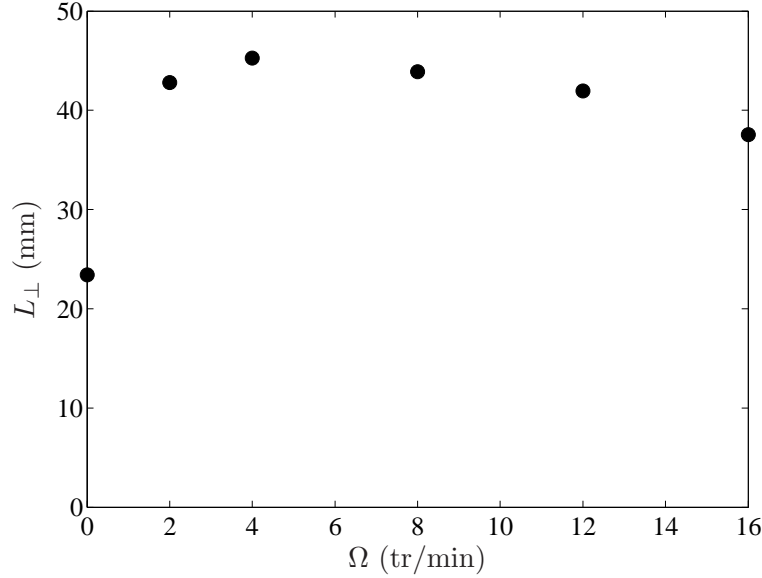


FIGURE 3.4 – Échelle intégrale horizontale en fonction de la vitesse de rotation  $\Omega$ .

que 0.89 montrant qu'une part significative de l'énergie est contenue dans des structures d'extension horizontale supérieure à 80 mm. Ceci est une trace de l'émergence de grandes structures horizontales liée à la rotation et que nous avons déjà pu observer directement sur les champs de vitesse instantanés (chapitre 2). On peut quantifier l'extension horizontale typique des structures turbulentes les plus énergétiques à travers l'échelle intégrale horizontale définie comme

$$L_{\perp} = \int_0^{r^*} \mathcal{C}(r_{\perp}) dr_{\perp}, \quad (3.7)$$

$$\text{avec } \mathcal{C}(r_{\perp}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C(r_{\perp}, \varphi) d\varphi, \quad (3.8)$$

$$\text{et } C(r_{\perp}, \varphi) = \frac{2\langle \mathbf{u}'_A(\mathbf{X}, \mathbf{r} = r_{\perp} \mathbf{e}_{\perp}, t) \cdot \mathbf{u}'_B(\mathbf{X}, \mathbf{r} = r_{\perp} \mathbf{e}_{\perp}, t) \rangle_{\mathbf{X}}}{E_0}. \quad (3.9)$$

La définition classique correspond à  $r^* = \infty$ , ce qui n'est évidemment pas applicable en pratique, les champs de vitesse n'étant disponibles que sur une taille finie. Dans notre cas, la corrélation  $\mathcal{C}(r_{\perp})$  ne décroissant pas jusque zéro aux échelles accessibles, nous avons choisi de fixer  $r^*$  telle que  $\mathcal{C}(r^*) = 0.25$ .

La figure 3.4 représente  $L_{\perp}$  en fonction de la vitesse de rotation  $\Omega$ . En l'absence de rotation, on a  $L_{\perp} \simeq 24$  mm, ce qui correspond à la taille typique des tourbillons générés par les générateurs. En présence de rotation, l'échelle  $L_{\perp}$  est presque multipliée par deux par rapport au cas non tournant, ce qui confirme la génération de structures turbulentes de grande extension horizontale.

La croissance des échelles horizontales est une propriété robuste de la turbulence en rotation qui peut être en partie attribuée à la présence d'un transfert d'énergie des petites vers les grandes échelles dans la zone de contrôle. La taille des structures présentes dans la zone de contrôle peut

cependant aussi dépendre du flux spatial d'énergie provenant des générateurs vers la zone de contrôle. Ce flux spatial d'énergie étant piloté par la statistique de l'écoulement, il est a priori modifié par la rotation d'ensemble. De ce fait, nous ne sommes pas, à ce stade, capable de trancher si l'accroissement de l'échelle horizontale  $L_{\perp}$  est lié à la modification des transferts d'énergie entre échelles directement dans la zone de mesure ou à l'évolution avec la rotation des échelles auxquelles le flux spatial injecte l'énergie. Dans la suite de cette étude, nous nous attacherons à quantifier ces transferts d'énergie spatiaux et en échelles et le bilan associé dans l'espace des échelles afin de répondre à cette question.

### Distribution d'énergie dans le plan vertical

Intéressons-nous à présent à la forme de la distribution d'énergie  $E(\mathbf{r})$  dans le plan vertical (figures 3.3 c,d). En l'absence de rotation les lignes de niveaux sont quasi-circulaires à petite échelle et s'allongent progressivement dans la direction  $(Oz)$  à mesure que l'on considère des échelles plus grandes. Cette tendance à l'invariance verticale à grande échelle est une conséquence directe de la géométrie de notre forçage qui injecte des tourbillons quasi-invariants verticalement à grande échelle. Le scénario probable pour expliquer le retour à l'isotropie à petite échelle est que ces tourbillons quasi-2D se déstabilisent et alimentent des fluctuations 3D à plus petite échelle [63]. Pour  $\Omega = 16$  tr/min, l'anisotropie est nettement plus marquée et au contraire présente quasiment à toutes les échelles : elle est de plus en plus prononcée à mesure que l'échelle augmente. Ceci est une trace de la tendance à la bi-dimensionnalisation de notre écoulement avec la rotation. On peut quantifier l'anisotropie de la turbulence échelle par échelle à travers le paramètre d'anisotropie

$$A_E(r) = \frac{E_{\perp}(r) - E_{\parallel}(r)}{E_{\perp}(r) + E_{\parallel}(r)}, \quad (3.10)$$

avec  $E_{\perp}(r) = E(r_x = r, r_z = 0)$  et  $E_{\parallel}(r) = E(r_x = 0, r_z = r)$ . Celui-ci vaut zéro pour une turbulence 3D isotrope et 1 pour une turbulence 2D invariante selon la direction  $(Oz)$ . Le paramètre d'anisotropie  $A_E$  est tracé en fonction de  $r$  pour les différents taux de rotation à la figure 3.5. On remarque que  $A_E$  est croissant avec  $r$  pour tous les taux de rotation. Pour  $\Omega = 0$  cette croissance est toutefois très lente et  $A_E$  reste faible ( $A_E \in [-0.01, 0.1]$ ), indiquant que le forçage de géométrie 2D a finalement une influence limitée sur l'anisotropie de la turbulence. Pour le plus grand taux de rotation étudié,  $\Omega = 16$  tr/min,  $A_E(r) \simeq 0.85$  pour  $r > 10$  mm ce qui indique que l'écoulement est quasi-2D à grande échelle avec toutefois un léger retour à l'isotropie à petites échelles ( $r < 10$  mm). On observe également que l'anisotropie croît avec  $\Omega$  à toutes les échelles, ce qui montre que la rotation a une forte influence sur l'anisotropie à toutes les échelles. En présence de rotation, l'échelle de Zeman [40]

$$r_{\Omega} = \varepsilon^{1/2} \Omega^{-3/2}, \quad (3.11)$$

### 3.2. DISTRIBUTION D'ÉNERGIE ENTRE ÉCHELLES

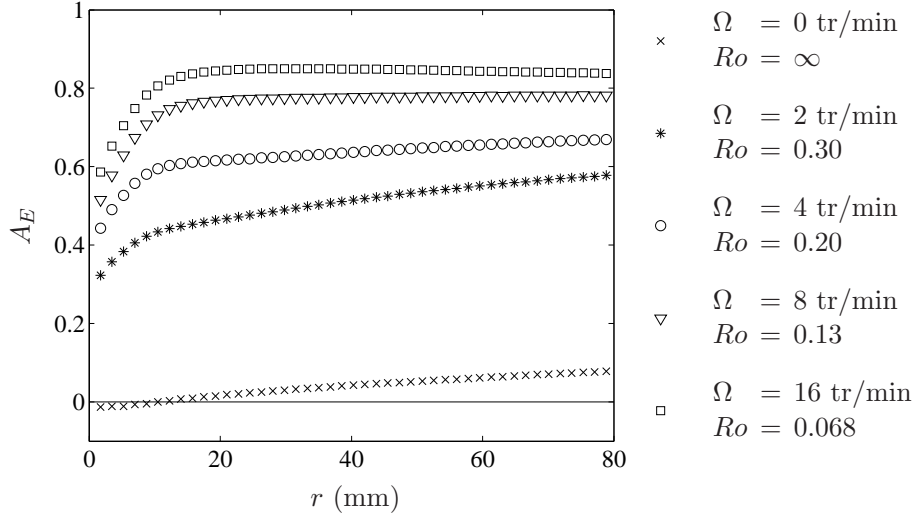


FIGURE 3.5 – Paramètre d'anisotropie  $A_E$  en fonction de l'échelle  $r$  pour différents taux de rotation.

$\varepsilon$  désignant le taux de dissipation par unité de masse<sup>1</sup>, se situe entre 0.3 et 5 mm, soit de l'ordre de grandeur ou inférieur à la résolution spatiale. L'échelle de Zeman s'interprète classiquement comme l'échelle au dessus de laquelle les effets de la rotation se font ressentir, ce qui est cohérent avec nos observations. On peut cependant questionner la pertinence de cette échelle pour décrire notre écoulement, qui est quasi-2D à forte rotation, alors que l'échelle de Zeman s'obtient dimensionnellement à partir des lois d'échelles de la turbulence 3D isotrope.

#### 3.2.3 Corrélations de vitesse en deux points et échelles intégrales

Nous avons vu au chapitre 2 que les composantes verticales et horizontales de la vitesse se structurent différemment en présence de rotation. La vitesse verticale forme de fines nappes alors que la vitesse horizontale forme des tourbillons de grande taille horizontale, ces structures ayant tendance à être invariantes verticalement, i.e. à avoir d'encore plus grandes extensions verticales. Toutes ces échelles de l'écoulement peuvent être quantifiées à travers la mesure d'échelles intégrales calculées à partir des corrélations de vitesse en deux points. Pour une turbulence axisymétrique, il existe cinq corrélations indépendantes  $C_i^{(j)}$  [73] (figure 3.6) définies comme la corrélation selon la direction  $\mathbf{e}_i$  de la composante  $u'_j$  de la vitesse

$$C_i^{(j)}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2\langle u'_j(\mathbf{x} - r\mathbf{e}_i/2)u'_j(\mathbf{x} + r\mathbf{e}_i/2) \rangle_{\mathbf{x}}}{\langle u_j'^2(\mathbf{x} - r_{\max}\mathbf{e}_i/2) + u_j'^2(\mathbf{x} + r_{\max}\mathbf{e}_i/2) \rangle_{\mathbf{x}}} d\varphi, \quad (3.12)$$

1. L'estimation de la dissipation  $\varepsilon$  est détaillé à la section 3.4.3.



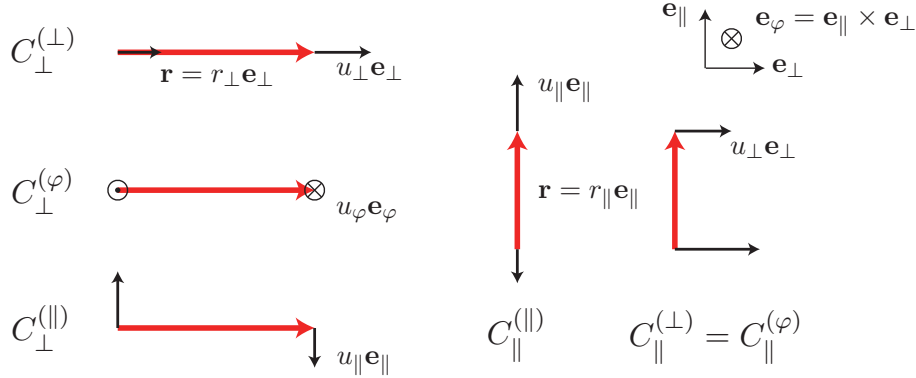


FIGURE 3.6 – Représentation schématique des fonctions de corrélations.

avec

$$i \in [\perp, \parallel] \quad \text{et} \quad j \in [\perp, \varphi, \parallel], \quad (3.13)$$

$$\text{et} \quad u'_{\perp} = \mathbf{u}' \cdot \mathbf{e}_{\perp}, \quad u'_{\varphi} = \mathbf{u}' \cdot (\mathbf{e}_{\parallel} \times \mathbf{e}_{\perp}), \quad u'_{\parallel} = \mathbf{u}' \cdot \mathbf{e}_{\parallel}. \quad (3.14)$$

La moyenne azimutale n'est réalisée que pour les corrélations calculées à partir des mesures dans le plan horizontal ( $C_{\perp}^{(j)}$ ) et on a, par définition,  $C_{\parallel}^{(\perp)} = C_{\parallel}^{(\varphi)}$ . Lorsque  $i = j$ , la corrélation est dite longitudinale, autrement, elle est dite transverse. Pour une turbulence isotrope, ces cinq corrélations peuvent s'écrire comme une fonction d'une seule corrélation longitudinale  $f(r)$  [3] telle que

$$C_{\perp}^{(\perp)} = C_{\parallel}^{(\parallel)} = f(r) \quad \text{et} \quad C_{\perp}^{(\varphi)} = C_{\perp}^{(\parallel)} = C_{\parallel}^{(\perp)} = f(r) + \frac{r}{2} \frac{df}{dr}. \quad (3.15)$$

La figure 3.7 représente les fonctions de corrélation en deux points pour  $\Omega = 0$  et 16 tr/min. Dans le cas sans rotation, les deux fonctions de corrélations longitudinales  $C_{\perp}^{(\perp)}$  et  $C_{\parallel}^{(\parallel)}$  diffèrent de moins de 5 % pour  $r < 40$  mm et les trois corrélations transverses  $C_{\perp}^{(\varphi)}$ ,  $C_{\perp}^{(\parallel)}$ ,  $C_{\parallel}^{(\perp)}$  de moins de 15 %. De plus, les quantités  $C_{\perp}^{(\perp)} + \frac{r}{2} \frac{dC_{\perp}^{(\perp)}}{dr}$  et  $C_{\parallel}^{(\parallel)} + \frac{r}{2} \frac{dC_{\parallel}^{(\parallel)}}{dr}$  sont égales aux corrélations transverses à moins de 15 % à ces mêmes échelles ce qui confirme la quasi-isotropie à petite échelle de notre turbulence.

Pour  $\Omega = 16$  tr/min, les deux corrélations dans la direction verticale  $C_{\parallel}^{(\parallel)}$  et  $C_{\parallel}^{(\perp)}$  décroissent beaucoup plus faiblement qu'en l'absence de rotation, ce qui traduit la croissance des échelles verticales de l'écoulement associée à la bi-dimensionnalisation. On remarque également que ces deux corrélations sont quasi-identiques contrairement au cas non tournant où  $C_{\parallel}^{(\parallel)} > C_{\parallel}^{(\perp)}$ , ce qui suggère une croissance des échelles verticales associées à la vitesse horizontale plus forte que celles associées à la vitesse verticale. La corrélation longitudinale horizontale décroît également plus faiblement que pour  $\Omega = 0$ , ce qui est une trace de la croissance des échelles horizontales de la turbulence en présence de rotation. Enfin, on observe que la corrélation horizontale de la

### 3.2. DISTRIBUTION D'ÉNERGIE ENTRE ÉCHELLES

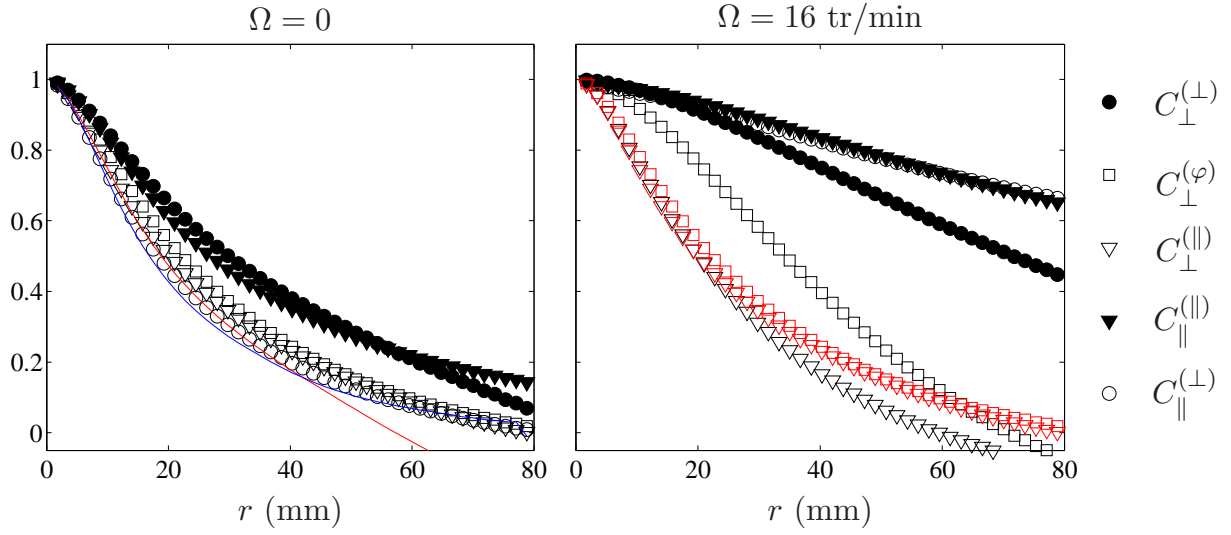


FIGURE 3.7 – Corrélations de vitesse en deux points en fonction de la séparation  $r$  pour  $\Omega = 0$  et 16 tr/min. Les symboles pleins et creux représentent respectivement les corrélations longitudinales et transverses. Dans la figure de gauche, les lignes continues rouge et bleue représentent respectivement  $C_{\perp}^{(\perp)} + \frac{r}{2} \frac{dC_{\perp}^{(\perp)}}{dr}$  et  $C_{\parallel}^{(\parallel)} + \frac{r}{2} \frac{dC_{\parallel}^{(\parallel)}}{dr}$  et sont prédites égales aux corrélations transverses  $C_{\perp}^{(\phi)}$ ,  $C_{\perp}^{(\parallel)}$  et  $C_{\parallel}^{(\perp)}$  pour une turbulence isotrope. Dans la figure de droite, les courbes en rouge représentent les corrélations horizontales transverses  $C_{\perp}^{(\phi)}$  et  $C_{\perp}^{(\parallel)}$  pour  $\Omega = 0$ .

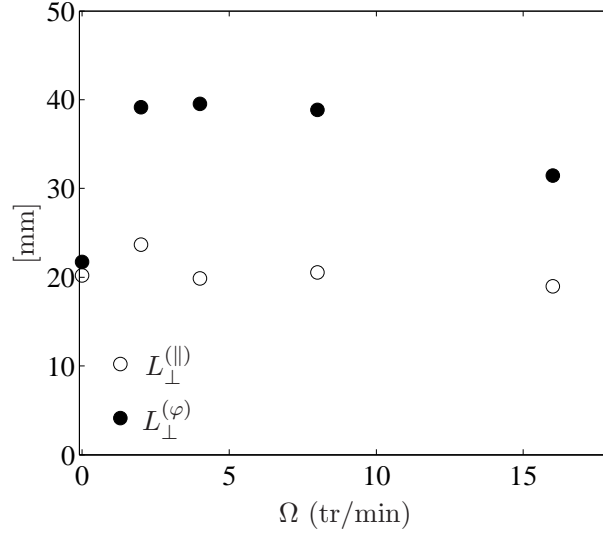


FIGURE 3.8 – Échelles intégrales horizontales  $L_{\perp}^{(||)}$  de la vitesse verticale et  $L_{\perp}^{(\varphi)}$  de la vitesse horizontale transverse en fonction du taux de rotation  $\Omega$ .

composante verticale de la vitesse  $C_{\perp}^{(||)}$  est légèrement plus faible qu'en l'absence de rotation (représentée en symboles rouges). À l'inverse, la corrélation horizontale de la composante horizontale transverse de la vitesse,  $C_{\perp}^{(\varphi)}$ , est beaucoup plus élevée à petite échelle qu'en l'absence de rotation. La différenciation des deux corrélations horizontales transverses est une trace de la structuration horizontale différente de la composante horizontale et verticale de la vitesse.

Déterminons à présent les échelles intégrales  $L_i^{(j)}$  associées à la composante  $u_j$  de la vitesse selon la direction  $\mathbf{e}_i$ . Elles sont définies comme l'intégrale des corrélations de vitesse en deux points

$$L_i^{(j)} = \int_0^{r^*} C_i^{(j)}(r) dr. \quad (3.16)$$

De même que pour le calcul de  $L_{\perp}$ , on choisit  $r^*$  telle que la corrélation soit égale à 0.25 en  $r = r^*$ . Comme la plupart des corrélations  $C_i^{(j)}$  ne décroissent pas assez dans la gamme des échelles accessibles, nous ne sommes en pratique capable de déterminer que les échelles intégrales horizontales transverses  $L_{\perp}^{(\varphi)}$  et  $L_{\perp}^{(||)}$ . La figure 3.8 représente ces échelles intégrales en fonction du taux de rotation. Pour  $\Omega = 0$ , les deux échelles sont égales à 4% près et valent environ 20 mm. En présence de rotation, l'échelle  $L_{\perp}^{(\varphi)}$  est presque doublée par rapport au cas sans rotation ce qui confirme la génération de structures cohérentes de vitesse horizontale de grande extension horizontale. L'échelle  $L_{\perp}^{(||)}$ , quant à elle, reste à peu près constante avec  $\Omega$ . Cette échelle correspond à l'ordre de grandeur de l'épaisseur horizontale des nappes de vitesse verticale observées dans le cas en rotation. On observe ici que la rotation tend à séparer les échelles typiques de la vitesse horizontale et de la vitesse verticale, ce qui est en accord avec les simulations LES de Squires *et al.* [73] et les expériences de Moisy *et al.* [43].

### 3.3. TRANSFERTS D'ÉNERGIE ENTRE ÉCHELLES

---

La séparation d'échelles observée ici entre les structures associées à la vitesse verticale et horizontale peut être pour partie le fruit des instabilités 3D précoces que subissent les dipôles de tourbillons générés par les volets, et pour partie celui de transferts d'énergie entre échelles différents pour les deux composantes de la vitesse dans le cœur de l'écoulement turbulent. La pertinence de l'un ou l'autre de ces mécanismes sera discutée dans la suite de ce chapitre.

## 3.3 Transferts d'énergie entre échelles

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'influence de la rotation sur les transferts d'énergie échelle à échelle que nous évaluons à travers la divergence du moment d'ordre trois des incréments de vitesse.

### 3.3.1 Équation de Kármán-Howarth-Monin

Le bilan d'énergie échelle à échelle d'une turbulence homogène (mais pas nécessairement isotrope) peut être décrit par l'équation de Kármán-Howarth-Monin (KHM) [3, 4].<sup>2</sup> Cette équation exacte décrit la conservation dans l'espace des échelles orientées  $\mathbf{r}$  du moment d'ordre deux des incréments de vitesse et s'exprime comme

$$\frac{1}{4}\partial_t \langle (\delta \mathbf{u}')^2 \rangle_{\mathbf{X},E} = -\Pi + D - \varepsilon + \Phi_{inj} \quad (3.17)$$

avec

$$\Pi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4} \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \langle (\delta \mathbf{u}')^2 \delta \mathbf{u}' \rangle_{\mathbf{X},E}, \quad (3.18)$$

$$D(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \nu \nabla_{\mathbf{r}}^2 \langle (\delta \mathbf{u}')^2 \rangle_{\mathbf{X},E}, \quad (3.19)$$

$$\varepsilon(t) = \frac{\nu}{2} \langle (\partial_i u'_j + \partial_j u'_i)^2 \rangle_{\mathbf{X},E}, \quad (3.20)$$

$$\Phi_{inj}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \langle \delta \mathbf{u}' \cdot \delta \mathbf{f} \rangle_{\mathbf{X},E}, \quad (3.21)$$

où  $\mathbf{f}$  désigne une éventuelle force par unité de masse,  $\langle \cdot \rangle_{\mathbf{X},E}$  la moyenne d'ensemble et d'espace et  $\nabla_{\mathbf{r}}$  la divergence par rapport à l'incrément  $\mathbf{r}$ . Le terme  $\Pi(\mathbf{r}, t)$  représente le transfert d'énergie entre échelles,  $D(\mathbf{r}, t)$  la diffusion de  $\langle (\delta \mathbf{u}')^2 \rangle$  par la viscosité,  $\varepsilon(t)$  le taux de dissipation instantané de l'énergie cinétique et  $\Phi_{inj}(\mathbf{r}, t)$  la puissance injectée par la force  $\mathbf{f}$ , ces quantités étant toutes à prendre par unité de masse. Sachant que la moyenne angulaire de  $\langle (\delta \mathbf{u}')^2 \rangle$  s'interprète comme l'énergie contenue dans les structures turbulentes de taille inférieure à  $r$ , la moyenne angulaire de  $\Pi$

$$\mathcal{P}(r, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \Pi(r, \theta, \varphi, t) \sin \theta d\theta d\varphi \quad (3.22)$$

---

2. On peut noter l'existence une multitude de généralisations de cette équation dans le contexte des fluides stratifiés [71] ou celui de la magnéto-hydrodynamique [72]...

peut s'interpréter comme le flux d'énergie des échelles plus petites que  $r$  vers les échelles plus grandes que  $r$ . Pour une turbulence isotrope, le signe de  $\Pi(\mathbf{r}, t) = \mathcal{P}(|\mathbf{r}|, t)$  nous indique de ce fait la direction des transferts d'énergie : directs (vers les petites échelles) si  $\Pi < 0$  et inverses (vers les grandes échelles) si  $\Pi > 0$ .

Remarquons que l'équation de KHM, qui est toujours valable pour les écoulements en référentiel tournant, ne fait pas intervenir le vecteur rotation  $\boldsymbol{\Omega}$ . Ceci traduit le rôle subtil de la pseudo-force de Coriolis qui ne travaille pas et n'apparaît donc pas explicitement dans les équations de conservation de l'énergie. La force de Coriolis intervient en réalité à travers son influence sur le moment d'ordre 3 des incréments de vitesse  $\mathbf{F}' = (\delta \mathbf{u}')^2 \delta \mathbf{u}'$ <sup>3</sup>. Un des objectifs de ce chapitre est ainsi de caractériser l'effet de la rotation sur le flux d'énergie échelle à échelle  $\Pi = \frac{1}{4} \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{F}'$ .

Par ailleurs, dans notre expérience, le fluide n'est soumis à aucune force volumique, si bien que le terme source  $\Phi_{inj}$  dans l'équation de KHM est nul. Notre turbulence est cependant statistiquement stationnaire, ce qui révèle que le bilan global d'énergie ne peut être compris dans le cadre "simple" de l'équation de KHM homogène. Nous verrons que le terme source, qui nourrit la turbulence dans la zone de mesure, est en fait lié à un transport spatial d'énergie à travers les frontières de la zone d'étude. Ce forçage effectif est intrinsèquement lié à l'existence d'inhomogénéités dans la statistique turbulente et sera traité dans la section 3.4. Dans la suite nous remplacerons les moyennes d'ensemble par une moyenne temporelle par hypothèse d'ergodicité.

### 3.3.2 Transferts horizontaux d'énergie entre échelles

Nous décomposons le flux d'énergie en ses contributions verticales et horizontales à la divergence des moments d'ordre trois des incréments de vitesse, respectivement perpendiculaire et parallèle au vecteur rotation  $\boldsymbol{\Omega} \mathbf{e}_{\parallel}$

$$\Pi(\mathbf{r}) = \Pi_{\perp}(\mathbf{r}) + \Pi_{\parallel}(\mathbf{r}), \quad (3.23)$$

$$= \frac{1}{4} \nabla_{\perp} \cdot \langle (\delta \mathbf{u}')^2 \delta \mathbf{u}'_{\perp} \rangle_{\mathbf{x}} + \frac{1}{4} \nabla_{\parallel} \cdot \langle (\delta \mathbf{u}')^2 \delta u'_{\parallel} \rangle_{\mathbf{x}} \quad (3.24)$$

avec  $\nabla_{\perp} = \partial_{r_x} \mathbf{e}_x + \partial_{r_y} \mathbf{e}_y$  et  $\nabla_{\parallel} = \partial_{r_z}$ . En principe, à partir des mesures dans le plan horizontal et vertical, nous sommes capable de mesurer les deux contributions  $\Pi_{\perp}(\mathbf{r})$  et  $\Pi_{\parallel}(\mathbf{r})$ . Cependant, il se trouve que le moment d'ordre trois des incréments de vitesse  $\langle (\delta \mathbf{u}')^2 \delta \mathbf{u}' \rangle_{\mathbf{x}}$  montre, contrairement au moment d'ordre deux, un écart important à l'axisymétrie. De ce fait, les mesures dans un plan vertical dépendent fortement du choix de ce plan. De plus, l'écoulement à grand taux de rotation est quasi-invariant verticalement mais dépend toujours fortement des deux directions horizontales. La moyenne spatiale selon  $z$  apporte ainsi une statistique négligeable au calcul des flux d'énergie en comparaison des moyennes selon  $x$  et  $y$ . Les quantités mesurées dans un plan vertical, qui ne contient qu'une seule direction horizontale, sont donc moins bien convergées que par moyenne sur un plan horizontal. Pour toutes ces raisons, le terme de transfert  $\Pi_{\parallel}$  sera ignoré

3. Le vecteur rotation apparaît explicitement dans l'équation de conservation de  $\mathbf{F}'$  sous la forme  $\partial_t \mathbf{F}' = -2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{F}' + \text{OT}$  avec OT contenant les termes de transfert, de forçage et de diffusion visqueuse de la quantité  $\mathbf{F}'$ .

### 3.3. TRANSFERTS D'ÉNERGIE ENTRE ÉCHELLES

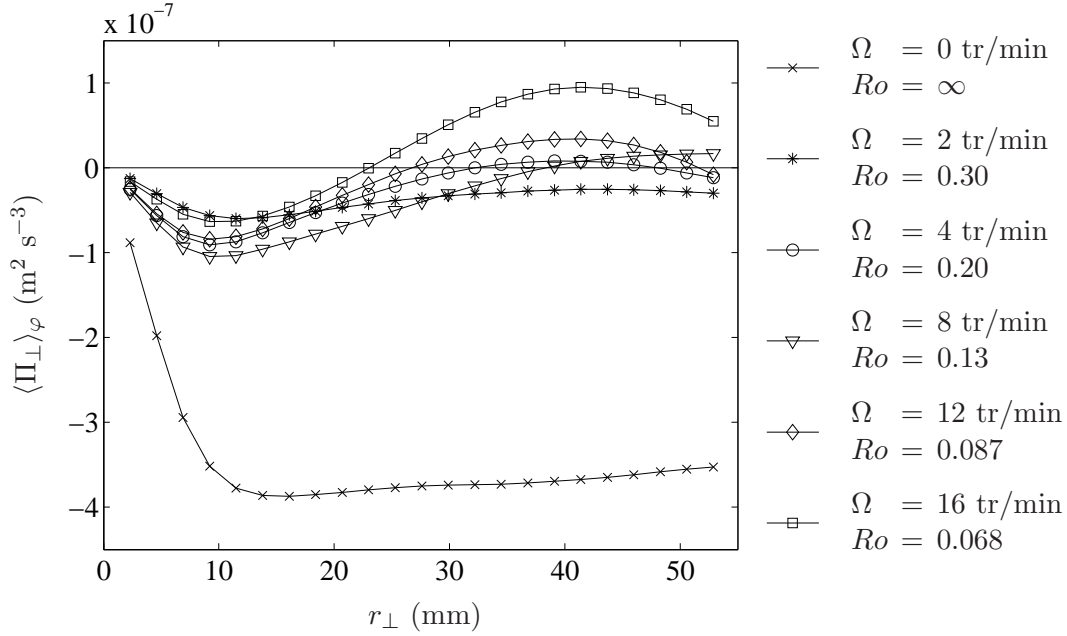


FIGURE 3.9 – Moyenne azimutale du flux horizontal d'énergie entre échelles  $\langle \Pi_{\perp}(\mathbf{r}) \rangle_{\varphi}$  en fonction de l'échelle horizontale  $r_{\perp}$  et pour différents taux de rotation.

dans cette étude. On peut cependant justifier à partir de considérations de symétrie, que ce terme est faible devant celui lié aux gradients horizontaux du champ de vitesse  $\Pi_{\perp}$ . En effet, pour une turbulence statistiquement invariante par réflexion par rapport à un plan horizontal (non hélicitaire  $\langle \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \rangle_{\mathbf{x}} = 0$ ), les dérivées verticales  $\partial_{r_z}$  des quantités statistiques en deux points sont nulles pour les incréments horizontaux, c'est à dire pour  $r_{\parallel} = 0$ . Pour une turbulence 2D invariante verticalement dont on se rapproche lorsque la rotation augmente,  $\Pi_{\parallel}(\mathbf{r})$  est par ailleurs nul quel que soit l'incrément  $\mathbf{r}$ . Notre forçage de géométrie 2D est a priori non-hélicitaire si bien que l'on s'attend à ce que les transferts d'énergie verticaux  $\Pi_{\parallel}$  soient nuls pour les vecteurs séparation  $\mathbf{r}$  du plan horizontal.

Dans la suite nous nous concentrerons donc uniquement sur les transferts horizontaux mesurés dans le plan horizontal et nous contournerons le défaut d'axisymétrie en réalisant une moyenne azimutale (sur  $\varphi$ ) symbolisée par  $\langle \cdot \rangle_{\varphi}$ . La figure 3.9 représente la moyenne azimutale du flux horizontal d'énergie  $\langle \Pi_{\perp} \rangle_{\varphi}$  en fonction de l'échelle horizontale  $r_{\perp}$ . Dans le cas sans rotation,  $\langle \Pi_{\perp} \rangle_{\varphi}$  est négatif à toutes les échelles, comme attendu pour un transfert direct d'énergie des grandes vers les petites échelles d'une turbulence tridimensionnelle sans rotation. À mesure que le taux de rotation augmente,  $\langle \Pi_{\perp} \rangle_{\varphi}$  croît (diminue en valeur absolue) et finit même par changer de signe, ce qui se traduit par l'apparition d'un transfert inverse d'énergie aux grandes échelles pour  $\Omega \geq 4 \text{ tr/min}$ . On remarque finalement que ce flux inverse devient plus intense et s'étend à des échelles de plus en plus petites lorsque  $\Omega$  croît. La coexistence entre un flux direct à petite échelle et inverse à grande échelle persiste au plus grand taux de rotation ( $\Omega = 16 \text{ tr/min}$ ). Évidemment, un terme source d'énergie à des échelles intermédiaires de l'ordre de grandeur de

l'échelle de changement de signe du flux est nécessaire pour alimenter ces deux cascades. Nous reviendrons sur ce point à la section 3.4.

### 3.3.3 Transferts horizontaux de l'énergie horizontale et verticale

Le flux d'énergie horizontal (3.17) est composé de deux contributions, le flux horizontal de l'énergie horizontale  $(\delta \mathbf{u}'_{\perp})^2$ , et le flux horizontal de l'énergie verticale  $(\delta u'_{\parallel})^2$ . Pour aller plus loin dans la compréhension de ces flux d'énergie nous décomposons donc  $\Pi_{\perp}$  en ces deux contributions

$$\Pi_{\perp}(r_{\perp}) = \Pi_{\perp}^{(\perp)} + \Pi_{\perp}^{(\parallel)}, \quad (3.25)$$

$$= \frac{1}{4} \nabla_{\perp} \cdot \langle (\delta \mathbf{u}'_{\perp})^2 \delta \mathbf{u}'_{\perp} \rangle_{\mathbf{x}} + \frac{1}{4} \nabla_{\perp} \cdot \langle (\delta u'_{\parallel})^2 \delta \mathbf{u}'_{\perp} \rangle_{\mathbf{x}} \quad (3.26)$$

et les traçons à la figure 3.10.

On remarque tout d'abord que  $\Pi_{\perp}^{(\parallel)}$  est négatif à toutes les échelles et pour tous les taux de rotation, ce qui indique que l'énergie verticale est toujours transférée des grandes vers les petites échelles horizontales. En ce qui concerne le flux horizontal d'énergie horizontale  $\langle \Pi_{\perp}^{(\perp)}(\mathbf{r}) \rangle_{\varphi}$ , on remarque que son comportement est similaire à celui de  $\langle \Pi_{\perp} \rangle_{\varphi}$ . Il est négatif à toutes les échelles en l'absence de rotation et décroît en valeur absolue lorsque  $\Omega$  augmente pour finalement changer de signe. Mais cette fois, les transferts inverses s'étendent à des échelles encore plus petites voire même sur toute la gamme d'échelles énergétiques au delà de  $\Omega \geq 12$  tr/min.

La mesure de  $\Pi_{\perp}^{(\parallel)}$  et de  $\Pi_{\perp}^{(\perp)}$  montre que seule la direction des transferts d'énergie horizontale est affectée par la rotation alors que l'énergie verticale est, elle, systématiquement transférée vers les petites échelles. Pour comprendre le processus responsable de ce transfert direct de l'énergie verticale, il est important de le discuter à la lumière des mesures des transferts de l'énergie horizontale. Pour  $\Omega = 0$  les deux contributions au flux horizontal  $\Pi_{\perp}^{(\parallel)}$  et  $\Pi_{\perp}^{(\perp)}$  sont négatives, ce qui est compatible avec la cascade directe d'énergie d'une turbulence 3D isotrope. À forte rotation ( $\Omega \geq 8$  tr/min), l'énergie horizontale  $(\delta \mathbf{u}'_{\perp})^2$  subit un transfert inverse à presque toutes les échelles. Les transferts directs d'énergie verticale  $(\delta \mathbf{u}'_{\parallel})^2$  peuvent alors être interprétés comme similaires à ceux d'un scalaire passif advecté par un écoulement 2D. Pour un écoulement invariant selon ( $Oz$ ), l'équation de Navier-Stokes se découple en effet en une équation de Navier-Stokes 2D pour les composantes horizontales de la vitesse et en une équation d'advection-diffusion pour la composante verticale, l'advection étant due à la vitesse horizontale. La vitesse verticale se comporte alors comme un scalaire passif et forme de fines nappes en étant étirée et repliée par la vitesse horizontale. Ce processus d'étirement-repliement produit de petites échelles et induit un transfert direct d'énergie verticale [4, 14, 74]. Évidemment, notre écoulement n'est jamais parfaitement 2D, mais la mesure des transferts montre qu'à forte rotation, c'est cette dynamique 2D de l'écoulement qui domine les transferts horizontaux d'énergie.

Enfin, pour les taux de rotation intermédiaires ( $\Omega = [2, 4]$  tr/min), la physique des transferts est beaucoup plus riche. Il semble que la physique de la turbulence 2D et 3D coexistent, la physique de la turbulence 2D dominant les transferts d'énergie aux grandes échelles ( $\Pi_{\perp}^{(\perp)} > 0$  et  $\Pi_{\perp}^{(\parallel)} < 0$ ) et celle de la turbulence 3D dominant aux petites échelles ( $\Pi_{\perp}^{(\perp)} < 0$  et  $\Pi_{\perp}^{(\parallel)} < 0$ ).

### 3.3. TRANSFERTS D'ÉNERGIE ENTRE ÉCHELLES

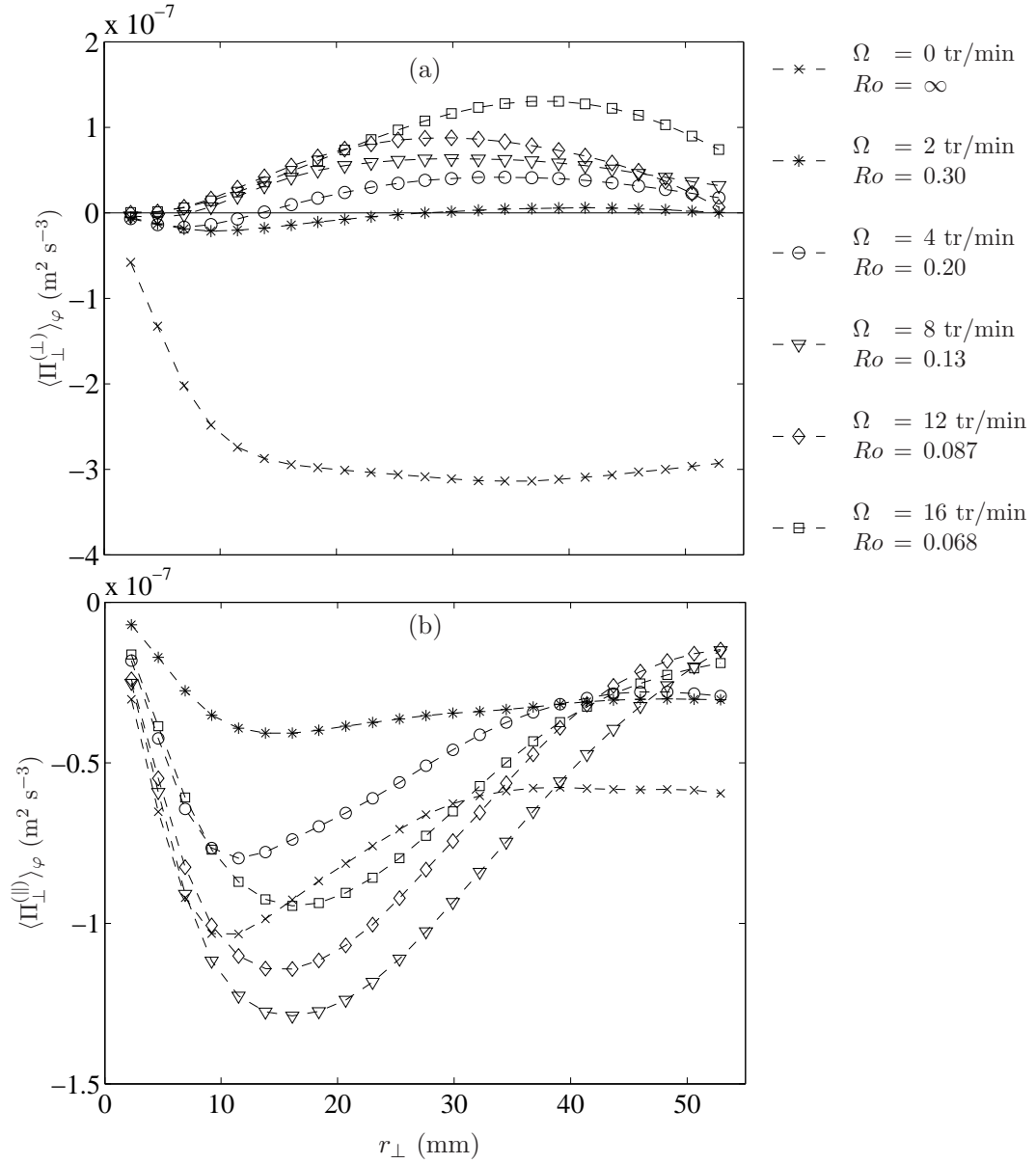


FIGURE 3.10 – Moyenne azimutale du flux horizontal (a) d'énergie horizontale  $\langle \Pi_{\perp}^{(\perp)}(\mathbf{r}) \rangle_{\varphi}$ , et (b) d'énergie verticale  $\langle \Pi_{\perp}^{(\parallel)}(\mathbf{r}) \rangle_{\varphi}$  pour différents taux de rotation.



### 3.4 Bilan d'énergie échelle à échelle et forçage inhomogène

Afin de comprendre en détail le bilan des flux d'énergie dans l'espace des échelles, il est important de décrire les taux d'injection et de dissipation de l'énergie dans le système et notamment leur dépendance en échelle. Dans les simulations numériques, l'injection de l'énergie permettant d'entretenir la turbulence dans un état statistiquement stationnaire est généralement réalisée au moyen d'une force massique et statistiquement homogène  $\mathbf{f}$ . Il en résulte le terme source  $\Phi_{inj}(\mathbf{r})$  dans l'équation de KHM (3.17) qui décrit l'injection d'énergie dans cette équation de conservation de l'énergie dans l'espace des échelles. En général cette injection d'énergie se restreint à une gamme très limitée d'échelles  $r$ . Dans notre expérience, le fluide est au contraire mis en mouvement grâce aux générateurs placés à l'extérieur de notre champ de mesure. L'injection d'énergie dans le domaine étudié provient alors nécessairement d'un transport spatial d'énergie allant en moyenne des générateurs vers la zone étudiée. Notre turbulence statistiquement stationnaire non forcée volumiquement ne peut ainsi être décrite par l'équation de Kármán-Howarth-Monin homogène (3.17) qui ne contient pas de terme source. Afin de comprendre l'injection d'énergie dans le bilan des flux d'énergie en échelles, il est alors nécessaire de prendre en compte explicitement les inhomogénéités dans la suite de notre analyse.

#### 3.4.1 Équation de Kármán-Howarth-Monin inhomogène (KHM<sub>i</sub>)

Nous nous plaçons dans le cadre de la généralisation inhomogène de l'équation de KHM proposée par Hill [15, 75] dont nous rappelons ici brièvement la dérivation, en l'étendant aux fluides en rotation. Nous nous plaçons tout d'abord dans le cadre plus général d'une turbulence a priori instationnaire. Notre point de départ est l'équation de Navier-Stokes (NS) en référentiel tournant

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (3.27)$$

avec  $p$  la pression corrigée par la force centrifuge et normalisée par la masse volumique du fluide. On en prend la différence entre les points  $\mathbf{x}_B = \mathbf{X} + \mathbf{r}/2$  et  $\mathbf{x}_A = \mathbf{X} - \mathbf{r}/2$  dont on considère ensuite le produit scalaire avec  $\delta \mathbf{u} = \mathbf{u}_B - \mathbf{u}_A$ , ce qui conduit à l'équation

$$\begin{aligned} \partial_t (\delta \mathbf{u})^2 + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot (\delta \mathbf{u})^2 \delta \mathbf{u} = & 2\nu \nabla_{\mathbf{r}}^2 (\delta \mathbf{u})^2 - 4\tilde{\varepsilon} \\ & + \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \left[ -(\delta \mathbf{u})^2 \tilde{\mathbf{u}} - 2\delta p \delta \mathbf{u} + \frac{\nu}{2} \nabla_{\mathbf{X}} ((\delta \mathbf{u})^2 - 8\tilde{\tau}) \right], \end{aligned} \quad (3.28)$$

avec  $\delta p = p_B - p_A$ . À ce stade aucune moyenne n'a été prise, si bien que toutes les quantités sont des fonctions de  $(\mathbf{X}, \mathbf{r}, t)$ . Les opérateurs  $\nabla_{\mathbf{r}}$  et  $\nabla_{\mathbf{X}}$  sont respectivement relatif aux dérivées par rapport au vecteur  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{X}$ . Les indices  $A$  et  $B$  signifient que la quantité indicée est évaluée respectivement en  $\mathbf{x}_A$  et  $\mathbf{x}_B$ . L'opérateur  $\tilde{\cdot}$  symbolise la moyenne arithmétique entre les points  $A$  et  $B$  tel que :  $\tilde{\mathbf{u}} = (\mathbf{u}_A + \mathbf{u}_B)/2$ ,  $\tilde{p} = (p_A + p_B)/2$ ,  $\tilde{\varepsilon} = (\varepsilon_A + \varepsilon_B)/2$ , avec  $\varepsilon = \frac{\nu}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j)^2$  le taux de dissipation d'énergie local et enfin  $\tilde{\tau} = (\tau_A + \tau_B)/2$  avec  $\tau_{ij} = u_i u_j$  le tenseur de

### 3.4. BILAN D'ÉNERGIE ÉCHELLE À ÉCHELLE ET FORÇAGE INHOMOGÈNE

corrélation des vitesses en un point. Le terme non-linéaire de l'équation de Navier-Stokes a fait émerger deux contributions : un terme de transfert entre échelles  $\nabla_{\mathbf{r}} \cdot (\delta \mathbf{u})^2 \delta \mathbf{u}$  et un terme de transport spatial  $-\nabla_{\mathbf{X}} \cdot (\delta \mathbf{u})^2 \tilde{\mathbf{u}}$ .

On prend finalement les moyennes d'ensemble  $\langle \cdot \rangle_E$  et spatiale  $\langle \cdot \rangle_{\mathbf{X}}$  de l'équation (3.28) sur un volume de contrôle  $V_X$  dans l'espace des  $\mathbf{X}$ , ce qui amène l'équation de Kármán-Howarth-Monin inhomogène (KHM<sub>i</sub>)

$$\partial_t \langle (\delta \mathbf{u})^2 \rangle_{\mathbf{X},E} + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \langle (\delta \mathbf{u})^2 \delta \mathbf{u} \rangle_{\mathbf{X},E} = 2\nu \nabla_{\mathbf{r}}^2 \langle (\delta \mathbf{u})^2 \rangle_{\mathbf{X},E} - 4\langle \tilde{\varepsilon} \rangle_{\mathbf{X},E} + \Phi_{\text{inh}}(\mathbf{r}), \quad (3.29)$$

avec

$$\Phi_{\text{inh}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{V_X} \oint_{S_X} \left( -\langle (\delta \mathbf{u})^2 \tilde{\mathbf{u}} \rangle_E + \frac{\nu}{2} \nabla_{\mathbf{X}} \langle (\delta \mathbf{u})^2 - 8\tilde{\tau} \rangle_E - 2\langle \delta p \delta \mathbf{u} \rangle_E \right) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{X}}. \quad (3.30)$$

Le terme  $\Phi_{\text{inh}}$  est obtenu en appliquant le théorème de Green-Ostrogradski avec  $S_X$  la surface fermée délimitant le volume  $V_X$  et le vecteur  $d\mathbf{S}_{\mathbf{X}}$  dirigé vers l'extérieur du volume de contrôle par convention. Ce terme supplémentaire  $\Phi_{\text{inh}}$  de l'équation est intrinsèquement lié aux inhomogénéités statistiques de l'écoulement. Il assure l'apport (ou l'extraction) de l'énergie à une échelle  $\mathbf{r}$  donnée. Pour une turbulence homogène, on a  $\langle \tilde{\varepsilon} \rangle_{\mathbf{X},E} = \langle \varepsilon \rangle_E$  et  $\Phi_{\text{inh}} = 0$ , si bien que l'équation (3.29) se simplifie en l'équation de KHM homogène (3.17).

Le terme  $\Phi_{\text{inh}}$  (3.30) se compose de trois contributions :

1. le flux à travers la surface  $S_X$  de l'énergie cumulée  $(\delta \mathbf{u})^2$  lié à l'advection des structures par la vitesse  $\tilde{\mathbf{u}} = (\mathbf{u}_A + \mathbf{u}_B)/2$

$$4A = \frac{1}{V_X} \oint_{S_X} -\langle (\delta \mathbf{u})^2 \tilde{\mathbf{u}} \rangle_E \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{X}} = -\langle \nabla_{\mathbf{X}} \cdot (\delta \mathbf{u})^2 \tilde{\mathbf{u}} \rangle_{\mathbf{X},E}. \quad (3.31)$$

Ce terme est positif (apport d'énergie) quand  $\tilde{\mathbf{u}}$  est dirigé vers l'intérieur du volume de contrôle  $V_X$ . Dans le cas classique d'une turbulence de grille en soufflerie, la vitesse de transport  $\tilde{\mathbf{u}}$  peut être assimilée à la vitesse moyenne uniforme  $\mathbf{U}_0$ , si bien que le terme de flux prend la forme simple  $\frac{1}{V_X} \oint_{S_X} -\langle (\delta \mathbf{u})^2 \rangle_E \mathbf{U}_0 \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{X}}$ . L'énergie étant décroissante avec la distance à la grille, le flux d'énergie positif à travers la surface en amont de la zone étudiée est supérieur en norme au flux négatif à travers la surface en aval. Il en résulte un flux d'énergie positif dans le volume de contrôle qui est compensé par la dissipation. Dans notre expérience, l'écoulement moyen étant très petit comparé aux fluctuations (table 2.2 pour  $\Omega > 0$ ), l'apport d'énergie dans le volume de contrôle est alors contrôlé par l'advection de l'énergie turbulente par la vitesse turbulente elle-même.

2. un terme inhomogène de diffusion visqueuse de la distribution d'énergie dans l'espace des incréments centrés  $\mathbf{X}$

$$\frac{1}{V_X} \oint_{S_X} \frac{\nu}{2} \nabla_{\mathbf{X}} \langle (\delta \mathbf{u})^2 - 8\tilde{\tau} \rangle_E \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{X}}. \quad (3.32)$$

3.  $\frac{1}{V_X} \oint_{S_X} -2\langle \delta p \delta \mathbf{u} \rangle_E \cdot d\mathbf{S}_X$  qui provient de la corrélation entre la pression et la vitesse agissant aux frontières du volume de contrôle. Ce terme, en plus d'être non mesurable expérimentalement, est ambigu quant à l'interprétation physique de son action sur la distribution d'énergie  $\langle (\delta \mathbf{u})^2 \rangle_{\mathbf{X},E}$ . En effet, il peut, au choix, s'écrire comme un flux spatial  $\frac{1}{V_X} \oint_{S_X} -2\langle \delta p \delta \mathbf{u} \rangle_E \cdot d\mathbf{S}_X$  ou un flux en échelle  $-8\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \langle \tilde{p} \delta \mathbf{u} \rangle_{\mathbf{X},E}$ .

L'ambiguïté du terme de corrélation pression-vitesse, qui peut s'écrire à la fois comme une divergence par rapport à la position moyenne  $\mathbf{X}$  ou par rapport à l'incrément  $\mathbf{r}$ , ne permet pas l'interprétation de  $\Pi$  comme seul terme de transfert échelle à échelle et remet donc en cause la pertinence d'une telle analyse en échelle pour une turbulence inhomogène. Cependant, il est possible, sous l'hypothèse d'axisymétrie et d'homogénéité locales, de négliger ce terme de corrélation pression-vitesse (§ 3.4.2). Dans la suite de ce chapitre nous montrerons que la corrélation pression-vitesse peut être négligée aux petites échelles, ce qui réhabilite l'interprétation des transferts d'énergie à ces mêmes échelles.

### 3.4.2 Turbulence faiblement inhomogène

L'objectif de cette section est d'évaluer l'ordre de grandeur respectif des trois termes inhomogènes qui constituent  $\Phi_{inh}$  dans l'équation de KHM*i* sous l'hypothèse d'homogénéité et d'axisymétrie locales valide pour des échelles  $r$  petites devant l'échelle typique d'inhomogénéité de la turbulence  $L_{inh}$ . Nous supposons également que la turbulence est invariante par réflexion par rapport à un plan horizontal (turbulence non hélicitaire). On décompose la vitesse et la pression comme

$$\mathbf{u} = \mathbf{V} + \mathbf{v} \quad (3.33)$$

$$\text{et } p = P + q, \quad (3.34)$$

où  $\mathbf{v}$  et  $q$  sont les fluctuations associées aux échelles petites devant  $L_{inh}$ , et  $\mathbf{V}$  et  $P$  reflètent les grandes échelles de l'écoulement. L'hypothèse d'axisymétrie et d'homogénéité locales consiste à supposer que les statistiques sur  $\mathbf{v}$  et  $p$  sont axisymétriques et homogènes pour  $r/L_{inh} = \xi \ll 1$ .

Évaluons d'abord le terme de corrélation pression-vitesse qui se décompose comme

$$\langle \delta \mathbf{u} \delta p \rangle_E = \langle \delta \mathbf{V} \delta P \rangle_E + \langle \delta \mathbf{V} \delta q \rangle_E + \langle \delta \mathbf{v} \delta P \rangle_E + \langle \delta \mathbf{v} \delta q \rangle_E. \quad (3.35)$$

Étant donné que  $P$  et  $\mathbf{V}$  évoluent sur une échelle spatiale de l'ordre de  $L_{inh}$ , on a pour  $r \ll L_{inh}$

$$\delta P \simeq \mathbf{r} \cdot \nabla P \sim \xi P \quad \text{et} \quad \delta \mathbf{V} \sim \xi \mathbf{V}. \quad (3.36)$$

On déduit alors que  $\langle \delta \mathbf{V} \delta P \rangle_E = \mathcal{O}(\xi^2)$ ,  $\langle \delta \mathbf{V} \delta q \rangle_E = \mathcal{O}(\xi)$  et  $\langle \delta \mathbf{v} \delta P \rangle_E = \mathcal{O}(\xi)$ . Pour traiter le dernier terme  $\langle \delta \mathbf{v} \delta q \rangle_E$ , on utilise l'axisymétrie et l'homogénéité locales ainsi que la non hélicité de la turbulence. En appliquant au champ de vitesse une rotation autour de l'axe vertical passant par la position moyenne  $\mathbf{X}$ , puis, une réflexion par rapport au plan horizontal passant par  $\mathbf{X}$ , l'incrément de vitesse  $\delta \mathbf{v}_2$  obtenu après ces deux transformations est égal à l'incrément

### 3.4. BILAN D'ÉNERGIE ÉCHELLE À ÉCHELLE ET FORÇAGE INHOMOGÈNE

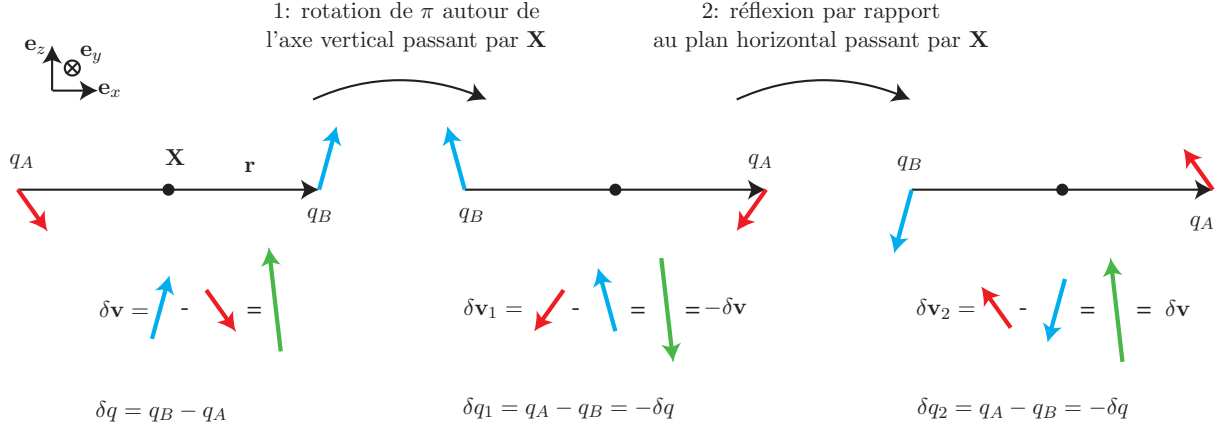


FIGURE 3.11 – Incréments de la vitesse  $\mathbf{v}$  et de la pression  $q$  :  $\delta \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{X} + \mathbf{r}/2) - \mathbf{v}(\mathbf{X} - \mathbf{r}/2)$  et  $\delta q = q(\mathbf{X} + \mathbf{r}/2) - q(\mathbf{X} - \mathbf{r}/2)$ .  $\delta \mathbf{v}_1$  et  $\delta q_1$  représentent les incréments de vitesse et de pression après une rotation des champs de vitesse  $\mathbf{v}$  et de pression  $q$  de  $\pi$  autour de l'axe vertical passant par la position moyenne  $\mathbf{X}$  et  $\delta \mathbf{v}_2$  et  $\delta q_2$  représentent ces mêmes incréments après une réflexion des champs de vitesse  $\mathbf{v}_1$  et de pression  $q_1$  par rapport au plan horizontal passant par  $\mathbf{X}$ .

initial  $\delta \mathbf{v}$  et l'incrément de pression  $\delta q_2$  est égal  $-\delta q$  (voir figure 3.11). À la suite de ces deux transformations, le produit des incréments de pression et de vitesse devient  $\delta \mathbf{v}_2 \delta q_2 = -\delta \mathbf{v} \delta q$ . Par axisymétrie et non-hélicité de la turbulence, on a alors, après moyenne statistique,  $\langle \delta \mathbf{v} \delta q \rangle_E = \langle \delta \mathbf{v}_2 \delta q_2 \rangle_E = -\langle \delta \mathbf{v} \delta q \rangle_E = 0$ . En conséquence,  $\langle \delta \mathbf{u} \delta p \rangle_E$  est d'ordre  $\mathcal{O}(\xi)$  dans la limite "faiblement inhomogène" et est donc négligeable devant le terme de transport  $\langle (\delta \mathbf{u})^2 \delta \mathbf{u} \rangle_E \sim \langle (\delta \mathbf{v})^2 \delta \mathbf{v} \rangle_E$ , qui est d'ordre  $\mathcal{O}(\xi^0)$ .

Le terme visqueux  $\frac{\nu}{2} \nabla_{\mathbf{X}} \langle (\delta \mathbf{u})^2 - 8 \tilde{\tau} \rangle_E$  est, lui, de l'ordre de

$$\nu \frac{\langle (\delta \mathbf{u})^2 \rangle_E}{L_{inh}} \sim \frac{\nu}{|\tilde{\mathbf{u}}| L_{inh}} \langle (\delta \mathbf{u})^2 \tilde{\mathbf{u}} \rangle_E. \quad (3.37)$$

Pour un nombre de Reynolds basé sur l'échelle d'inhomogénéité  $\frac{|\tilde{\mathbf{u}}| L_{inh}}{\nu}$  élevé, ce terme visqueux est donc négligeable devant le terme d'advection.

Pour les échelles inférieures à l'échelle typique des inhomogénéités, le terme de corrélation pression-vitesse est donc négligeable et l'interprétation physique des termes de KHM<sub>i</sub> (3.29)-(3.30) est de ce fait toujours valable. Sur cette gamme d'échelles, l'équation de KHM<sub>i</sub> permet ainsi de décrire l'injection d'énergie qui est le fruit de l'advection des structures turbulentes à travers la frontière du domaine d'étude.

Dans la suite, nous remplacerons la moyenne d'ensemble  $\langle \cdot \rangle_E$  par une moyenne temporelle  $\bar{\cdot}$  en faisant l'hypothèse d'ergodicité.

### 3.4.3 Estimation des termes de l'équation de KHM

Pour établir le bilan d'énergie échelle à échelle il faut être capable de mesurer les trois composantes de la vitesse dans un volume afin de pouvoir accéder aux dérivées spatiales dans les 3 directions. Nous ne mesurons que les trois composantes de la vitesse dans un plan par la technique de PIV stéréoscopique, il nous est donc a priori impossible d'accéder aux trois dérivées spatiales dans le cas général. Nous montrons dans cette section que, sous certaines hypothèses, nous sommes capable d'évaluer tout de même tous les termes de l'équation de KHM (3.29)-(3.30) dans un plan horizontal (mis à part évidemment le terme de corrélation pression-vitesse).

**Terme inhomogène d'advection** Le terme d'advection  $A$  (3.31) peut se décomposer en un flux horizontal  $A_\perp$  mesurable et vertical  $A_\parallel$  non mesurable dans le plan horizontal

$$A = A_\perp + A_\parallel \quad (3.38)$$

$$= -\frac{1}{4} \langle \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\delta \mathbf{u})^2 \tilde{\mathbf{u}}_\perp \rangle_{\mathbf{x}} - \frac{1}{4} \langle (\mathbf{e}_\parallel \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) (\delta \mathbf{u})^2 \tilde{u}_\parallel \rangle_{\mathbf{x}}. \quad (3.39)$$

De part l'invariance verticale de notre dispositif de forçage, on s'attend toutefois à ce que le flux vertical  $A_\parallel$  soit très petit devant le flux horizontal  $A_\perp$ . Le terme d'advection sera donc simplement évalué comme le flux horizontal  $A \simeq A_\perp$ .

**Terme inhomogène de diffusion** De même que pour  $A$ , nous ne pouvons accéder qu'à la contribution horizontale au terme de diffusion inhomogène  $D_X = \frac{\nu}{8S_X} \oint_{V_X} (\nabla_{\mathbf{x}} (\delta \mathbf{u})^2 - 8\bar{\tau}) \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{x}}$  qui a cependant été mesuré deux ordres de grandeur inférieure aux autres termes. La contribution verticale non mesurable est attendue du même ordre ou inférieure à la contribution horizontale, si bien que nous négligeons le terme visqueux dans la suite.

**Terme de transfert** Le terme de transfert contient une dérivée par rapport à  $r_z$  qui ne nous est pas accessible. Cependant, dans l'hypothèse où les statistiques sont invariantes par rapport à une réflexion par rapport au plan horizontal passant par  $r_\parallel = 0$ , les dérivés par rapport à  $r_z$  des quantités statistiques basées sur  $\delta \mathbf{u}$  sont nulles pour les incréments horizontaux ( $r_\parallel = 0$ ). Dans ce cas, on a  $\Pi(\mathbf{r} = r_\perp \mathbf{e}_\perp) \simeq \Pi_\perp(\mathbf{r} = r_\perp \mathbf{e}_\perp) = \frac{1}{4} \nabla_\perp \cdot \langle (\delta \mathbf{u}')^2 \delta \mathbf{u}'_\perp \rangle_{\mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{r}=r_\perp \mathbf{e}_\perp}$ . La distribution d'énergie dans le plan vertical montre que notre turbulence est quasi invariante par réflexion par rapport au plan horizontal passant par l'origine. Nous évaluerons donc le terme de transfert dans le plan horizontal avec  $\Pi_\perp$ .

**Terme de diffusion visqueuse** Le terme de diffusion visqueuse  $D = \frac{\nu}{2} \nabla^2 E$  fait intervenir la dérivée seconde par rapport à  $r_z$  qui n'est pas nécessairement nulle et qui ne peut pas être évaluée à partir des mesures dans le plan horizontal. Cependant, grâce à l'axisymétrie de la distribution d'énergie  $E$ , la contribution verticale peut être calculée à partir des mesures dans le plan vertical.

### 3.4. BILAN D'ÉNERGIE ÉCHELLE À ÉCHELLE ET FORÇAGE INHOMOGÈNE

**Taux de dissipation** De même que pour le terme de diffusion, le terme de dissipation  $\langle \tilde{\varepsilon} \rangle_{\mathbf{X}}$  fait intervenir des dérivées verticales. On peut décomposer le taux de dissipation  $\varepsilon$  en une contribution liée au cisaillement horizontal  $\varepsilon_{\perp}$  et une contribution liée au cisaillement vertical  $\varepsilon_{\parallel}$

$$\varepsilon = \varepsilon_{\perp} + \varepsilon_{\parallel}, \quad (3.40)$$

$$\varepsilon_{\perp} = \nu \left[ \frac{1}{2} (\partial_{\alpha} u_{\beta} + \partial_{\beta} u_{\alpha})^2 + (\partial_x u_{\parallel})^2 + (\partial_y u_{\parallel})^2 \right], \quad (\alpha, \beta) \in (x, y), \quad (3.41)$$

$$\varepsilon_{\parallel} = \nu \left[ 2(\partial_{\parallel} u_{\parallel})^2 + (\partial_{\parallel} u_x)^2 + (\partial_{\parallel} u_y)^2 + 2(\partial_x u_{\parallel})(\partial_{\parallel} u_x) + 2(\partial_y u_{\parallel})(\partial_{\parallel} u_y) \right], \quad (3.42)$$

avec  $\partial_{\parallel} = \partial_z$ . Tous les termes de la contribution liée au cisaillement horizontal  $\varepsilon_{\perp}$  sont calculables à partir des mesures dans le plan horizontal. De même que pour le terme de diffusion visqueuse  $D$ , grâce à l'axisymétrie de notre turbulence, nous évaluerons la contribution manquante  $\varepsilon_{\parallel}$  à partir des mesures dans le plan vertical en utilisant  $\overline{(\partial_y u_{\parallel})(\partial_{\parallel} u_y)} = \overline{(\partial_x u_{\parallel})(\partial_{\parallel} u_x)}$  par axisymétrie.

L'équation de KHM*i* se simplifie finalement pour des incréments horizontaux  $r_{\perp} \mathbf{e}_{\perp}$  et pour une turbulence stationnaire en

$$\langle \tilde{\varepsilon} \rangle_{\mathbf{X}} = \underbrace{-\Pi_{\perp} + D + A_{\perp}}_S + TN, \quad (3.43)$$

$TN$  comprenant les termes négligés (dérivés verticales, terme visqueux inhomogène) ainsi que le terme de corrélation pression-vitesse.

#### 3.4.4 Bilan d'énergie dans le plan horizontal

Aux figures 3.12 (a), 3.13 (a) et 3.14 (a), nous traçons les termes mesurables de l'équation de KHM*i* (3.43) ainsi que la somme de ses termes mesurables de droite  $S = -\Pi_{\perp} + D + A_{\perp}$  pour  $\Omega = 0, 4$  et  $16$  tr/min, ces quantités étant évaluées à partir de la partie turbulente du champ de vitesse et moyennées azimuthalement.

En l'absence de rotation,  $\langle \tilde{\varepsilon} \rangle_{\mathbf{X}}$  et  $S$  sont égaux à 3% près à toutes les échelles. En présence de rotation globale, ils sont égaux à 10% près pour toutes les séparations. Ce bon accord nous indique que l'approximation d'homogénéité locale est valide et que le terme de corrélation pression-vitesse est effectivement négligeable à petite échelle. De ce fait, nous pourrions dans la suite interpréter correctement  $A_{\perp}$  en tant que transport spatial et  $\Pi_{\perp}$  en tant que flux entre échelles de l'énergie cumulée. Le terme d'advection  $A_{\perp}$  est finalement le seul terme "source/puits" dans le bilan d'énergie.

On rappelle que l'équation de KHM*i* est une équation pour l'énergie cumulée  $E(\mathbf{r})$  des structures de tailles inférieures à  $|\mathbf{r}|$ , de sorte que  $A_{\perp}$  et  $D - \langle \tilde{\varepsilon} \rangle_{\mathbf{X}}$  correspondent respectivement à l'injection et à la dissipation d'énergie cumulée sur les échelles inférieures à  $|\mathbf{r}|$ . Il n'est alors pas aisé d'évaluer l'importance relative de la dissipation et de l'injection d'énergie à une échelle  $r$ . Pour s'affranchir de cette difficulté d'interprétation, on peut s'intéresser à l'équation de conser-

vation de la densité d'énergie  $e(r_\perp)$  associée à une échelle  $r_\perp$  et que l'on peut définir comme

$$e(r_\perp) = \frac{d}{dr_\perp} \langle E(r_\perp \mathbf{e}_\perp) \rangle_\varphi, \quad (3.44)$$

La quantité  $e(r_\perp)dr_\perp$  peut alors s'interpréter comme l'énergie contenue dans la fine gamme d'échelle  $[r_\perp, r_\perp + dr_\perp]$  pour les échelles grandes devant l'échelle de dissipation visqueuse [76].<sup>4</sup> On obtient alors l'équation d'évolution de  $e(r_\perp)$  en dérivant par rapport à  $r_\perp$  l'équation de KHM<sub>i</sub> (3.43), ce qui donne dans nos approximations :

$$0 = -\frac{d}{dr_\perp} \langle \Pi_\perp \rangle_\varphi + \frac{d}{dr_\perp} \langle D \rangle_\varphi + \frac{d}{dr_\perp} \langle A_\perp \rangle_\varphi + TN, \quad (3.45)$$

avec  $\frac{d}{dr_\perp} \langle A_\perp \rangle_\varphi$  la densité de flux d'énergie injectée et  $\frac{d}{dr_\perp} \langle D \rangle_\varphi$  la densité de taux de dissipation d'énergie qui nous renseignent respectivement sur l'injection/extraction et la dissipation d'énergie à une échelle donnée. Le terme  $\frac{d}{dr_\perp} \langle \Pi_\perp \rangle_\varphi$  représente le flux d'énergie abreuvant l'échelle horizontale  $r_\perp$  lié aux transferts d'énergie. Le signe de cette quantité n'indique en aucun cas la direction des transferts qui est liée au signe de son intégrale  $\langle \Pi_\perp \rangle_\varphi = \int_0^{r_\perp} \frac{d}{dr} \langle \Pi_\perp \rangle_\varphi(r) dr$ .

Les termes de l'équation (3.45) sont tracés aux figures 3.12 (b), 3.13 (b) et 3.14 (b), en complément des termes de l'équation de KHM<sub>i</sub>, afin de mieux décrire les échelles de dissipation et d'injection d'énergie dans le système.

### Bilan d'énergie en l'absence de rotation

En l'absence de rotation, on observe un transfert d'énergie échelle à échelle direct ( $\Pi_\perp < 0$ ) comme attendu pour une turbulence isotrope (figure 3.12). Pour une turbulence isotrope à très grand nombre de Reynolds l'échelle de forçage est très grande devant l'échelle de dissipation visqueuse. Dans la gamme inertielle, c'est à dire pour des échelles très grandes devant l'échelle visqueuse ( $D \simeq 0$ ) et très petites devant l'échelle d'injection ( $A_\perp \simeq 0$ ), on s'attend à ce que  $\Pi(r_\perp \mathbf{e}_\perp) = \Pi_\perp(r_\perp \mathbf{e}_\perp) = -\langle \bar{\varepsilon} \rangle_{\mathbf{X}}$ . L'énergie est injectée à grande échelle, cascade d'échelle en échelle à flux constant  $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_{\mathbf{X}}$  vers les petites échelles et est dissipée par la viscosité à petite échelle. Notre nombre de Reynolds n'est que de 140 et on n'observe donc évidemment pas une telle séparation entre l'échelle visqueuse et l'échelle de forçage. On observe que la densité d'injection d'énergie  $\frac{d}{dr_\perp} \langle A \rangle_\varphi$  est large bande et est maximale pour  $r_\perp \simeq 8$  mm. Aux échelles inférieures à 10 mm, la densité de dissipation d'énergie  $\frac{d}{dr_\perp} \langle D \rangle_\varphi$  domine largement l'injection. Aux échelles supérieures à 10 mm, l'injection est supérieure à la dissipation et un flux d'énergie approximativement constant,  $\Pi_\perp \simeq -0.5 \langle \bar{\varepsilon} \rangle_{\mathbf{X}}$ , alimente les plus petites échelles.

### 3.4. BILAN D'ÉNERGIE ÉCHELLE À ÉCHELLE ET FORÇAGE INHOMOGÈNE

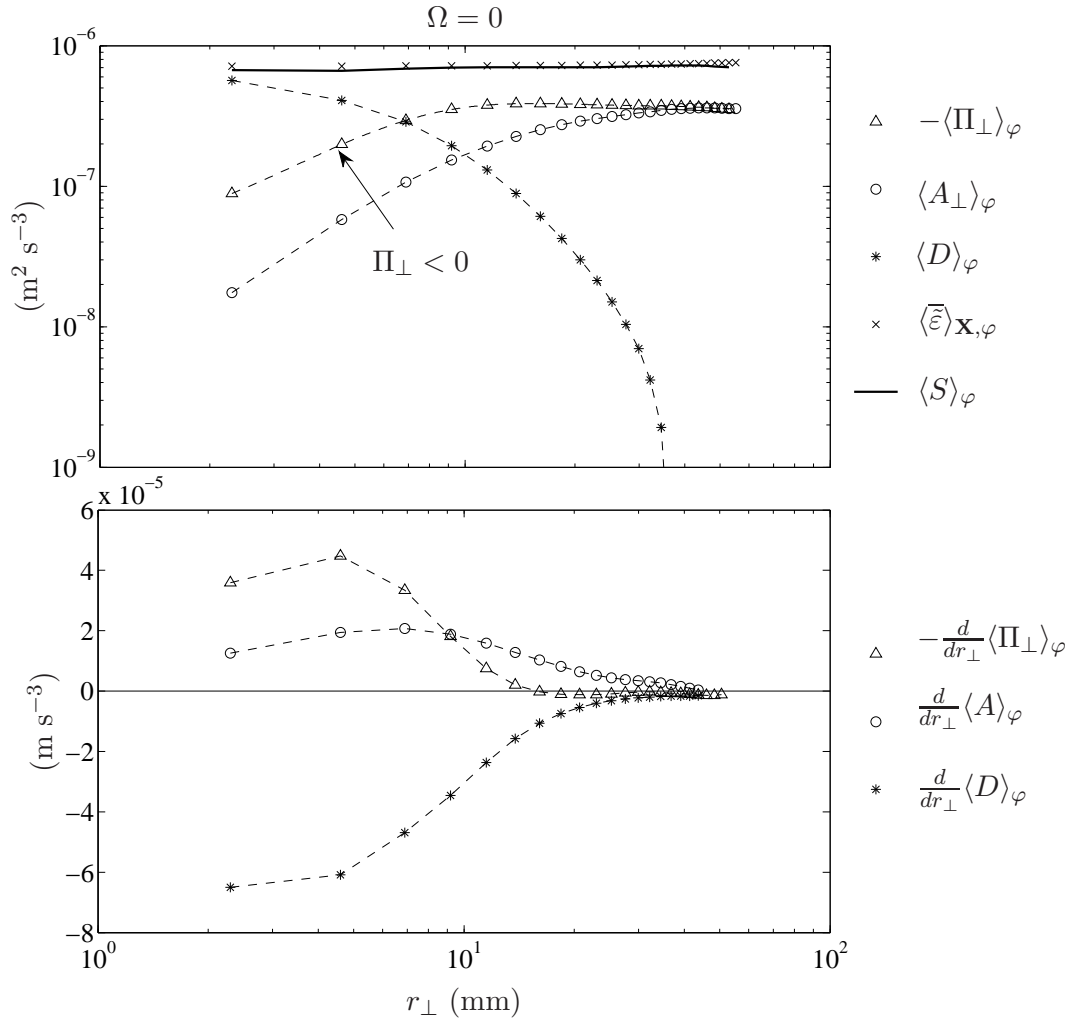


FIGURE 3.12 – Bilan des flux d'énergie échelle à échelle moyenné azimutalement pour  $\Omega = 0$ .



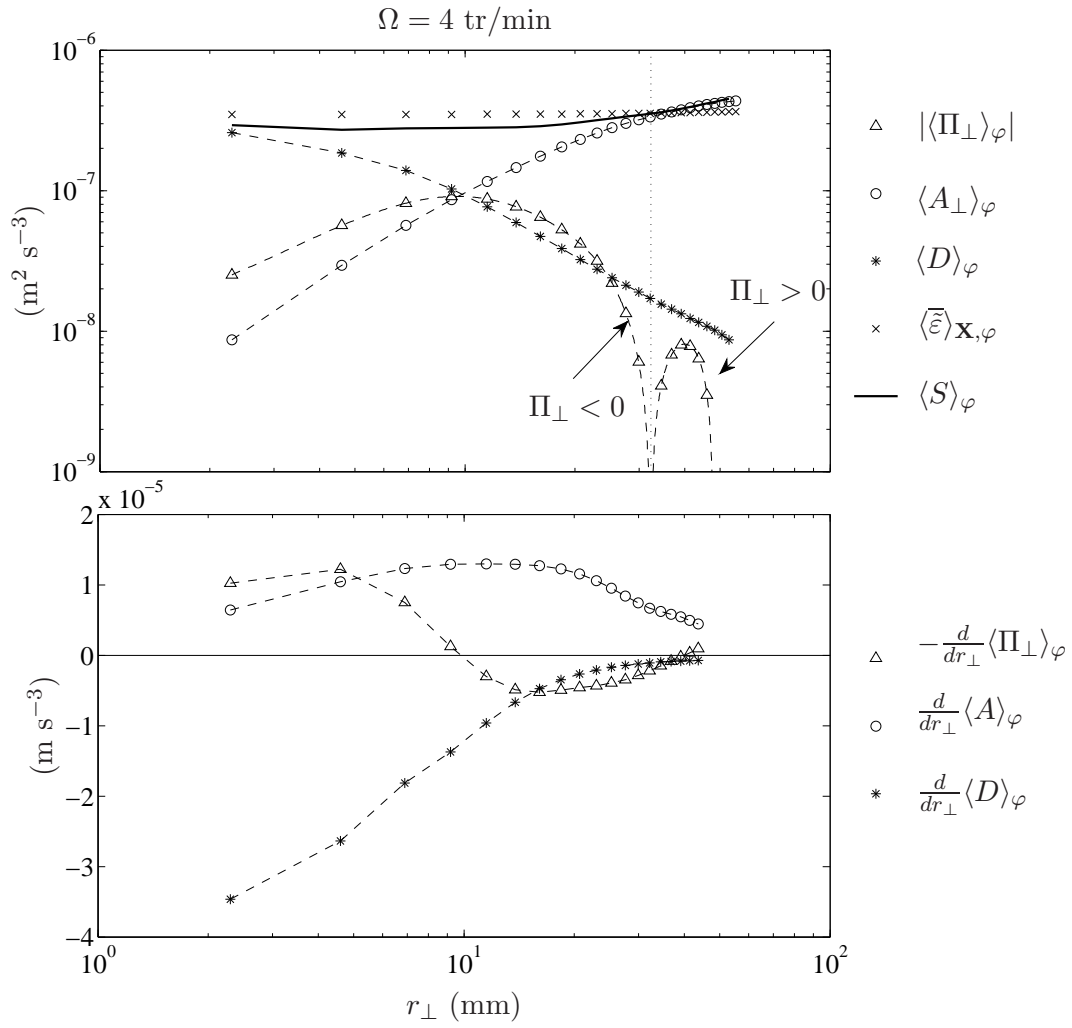


FIGURE 3.13 – Bilan des flux d'énergie échelle à échelle moyenné azimutalement pour  $\Omega = 4 \text{ tr/min}$ .

### 3.4. BILAN D'ÉNERGIE ÉCHELLE À ÉCHELLE ET FORÇAGE INHOMOGÈNE

#### Bilan d'énergie à rotation intermédiaire ( $\Omega = 4$ tr/min)

Pour  $\Omega = 4$  tr/min, la densité d'injection d'énergie, encore plus large bande qu'en l'absence de rotation, est maximale et quasi-constante entre 10 et 20 mm (figure 3.13). Pour  $r_\perp < 10$  mm la densité de dissipation domine la densité d'injection d'énergie. Pour  $r_\perp \geq 10$  mm,  $\frac{d}{dr_\perp}\langle D \rangle_\varphi$  est au contraire trop faible pour dissiper l'énergie injectée par  $\frac{d}{dr_\perp}\langle A \rangle_\varphi$  et l'énergie flue vers les petites échelles ( $\Pi_\perp < 0$ ) pour  $r_\perp \leq r_{\text{renv}} \simeq 30$  mm et vers les grandes échelles ( $\Pi_\perp > 0$ ) à plus grande échelle.

#### Bilan d'énergie à forte rotation ( $\Omega = 16$ tr/min)

Pour  $\Omega = 16$  tr/min, le forçage est encore plus large bande, la densité de taux d'injection étant maximale et quasi-constante entre 10 et 40 mm (figure 3.14). Une fois de plus la dissipation est plus élevée que l'injection aux échelles inférieures à 10 mm. À plus grande échelle,  $\frac{d}{dr_\perp}\langle D \rangle_\varphi$  est trop faible pour dissiper l'énergie injectée par  $\frac{d}{dr_\perp}\langle A \rangle_\varphi$  et l'énergie flue vers les petites échelles pour  $r_\perp \leq r_{\text{renv}} \simeq 20$  mm et vers les grandes échelles à plus grande échelle. Notons qu'un transfert inverse d'énergie pour une turbulence 2D pleinement développée serait caractérisé par  $\Pi_\perp \simeq A_\perp \gg \langle \bar{\varepsilon} \rangle_{\mathbf{X}}$ . Dans notre cas,  $\Pi_\perp$  est du même ordre de grandeur que  $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_{\mathbf{X}}$ , ce qui indique que la dissipation volumique reste importante dans notre expérience.

#### 3.4.5 Bilan d'énergie horizontale/verticale sous l'hypothèse d'un écoulement 2D

Dans cette section, nous nous concentrons sur le plus grand taux de rotation étudié,  $\Omega = 16$  tr/min, pour lequel la turbulence atteint un état fortement invariant verticalement (figure 3.5) mais toujours à trois composantes (figure 2.10).

Pour une turbulence bidimensionnelle (invariante par rapport à la verticale) mais toujours à trois composantes, l'équation d'évolution de la vitesse se décompose en deux équations indépendantes : une équation de Navier-Stokes 2D pour les composantes horizontales et une équation d'advection-diffusion de la composante verticale

$$\partial_t \mathbf{u}_\perp + (\mathbf{u}_\perp \cdot \nabla) \mathbf{u}_\perp = -(\mathbf{e}_x \partial_x + \mathbf{e}_y \partial_y) p - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_\perp + \nu(\partial_x^2 + \partial_y^2) \mathbf{u}_\perp, \quad (3.46)$$

$$\partial_t u_\parallel + (\mathbf{u}_\perp \cdot \nabla) u_\parallel = \nu(\partial_x^2 + \partial_y^2) u_\parallel. \quad (3.47)$$

On peut dans cette limite, qui n'est pas parfaitement atteinte dans notre expérience, établir des bilans séparés pour l'énergie horizontale et verticale en reprenant le même cheminement qu'à la section 3.4.1.

---

4. Pour une turbulence isotrope, Davidson introduit une définition un peu plus raffinée  $e(r) = -\frac{3}{8} \partial_r \frac{1}{r} \partial_r \langle (\delta u_l)^2 \rangle$  avec  $\delta u_l = \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$  [2]. Cette définition permet de tenir compte de la vorticité des échelles supérieures à  $r$  qui contribue à  $\mathcal{E}(r)$ . Aux échelles grandes devant l'échelle visqueuse, la vorticité n'intervient cependant plus dans  $\mathcal{E}$  et cette définition se simplifie en  $e(r) = \frac{3}{8} \partial_r \langle (\delta u_l)^2 \rangle$ .

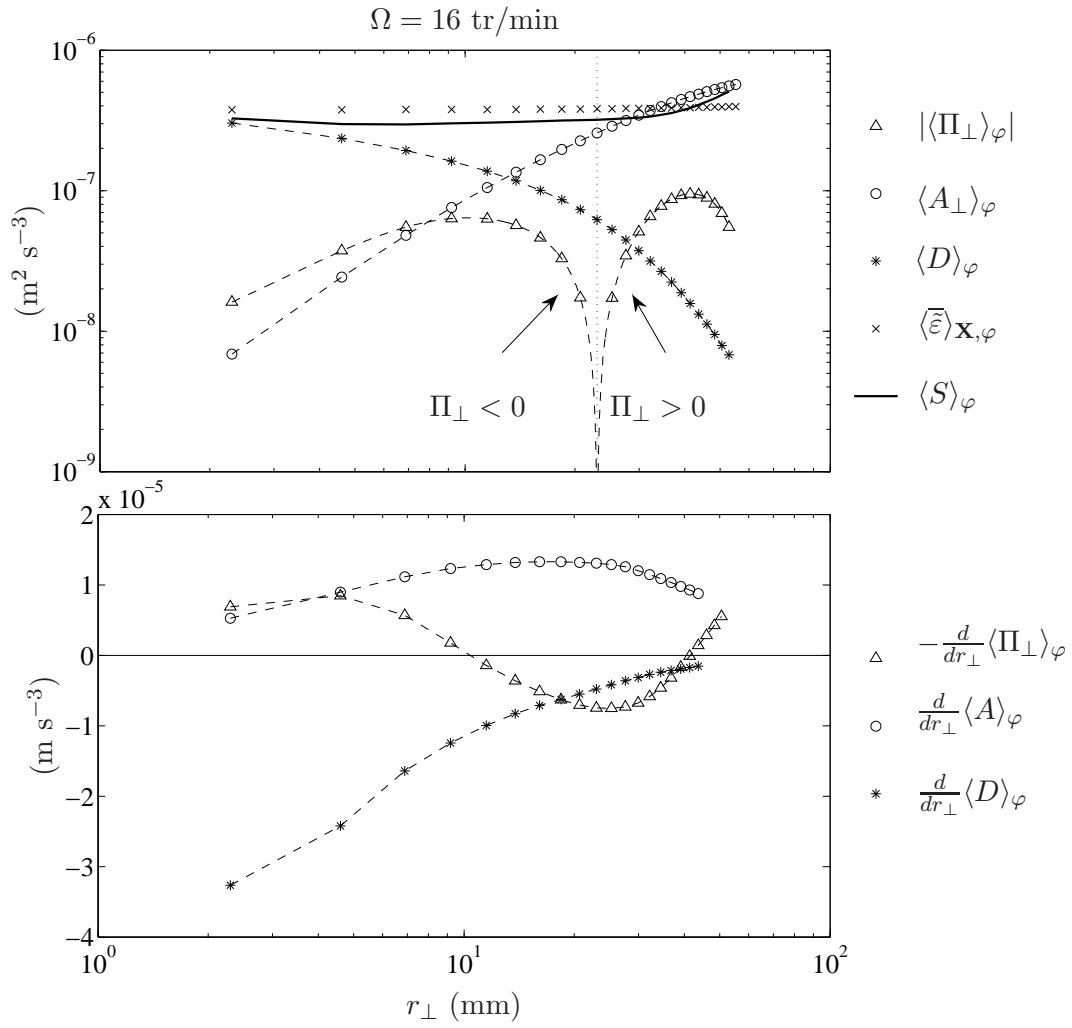


FIGURE 3.14 – Bilan des flux d'énergie échelle à échelle moyenné azimuthalement pour  $\Omega = 16 \text{ tr/min}$ .

### 3.4. BILAN D'ÉNERGIE ÉCHELLE À ÉCHELLE ET FORÇAGE INHOMOGÈNE

#### Bilan d'énergie horizontale

L'équation de KHM pour l'énergie horizontale  $\overline{\langle (\delta \mathbf{u}_\perp)^2 \rangle}_{\mathbf{X}}$  dans la limite 2D s'exprime comme

$$\overline{\langle \tilde{\varepsilon}_\perp^{(\perp)} \rangle}_{\mathbf{X}} = \underbrace{-\Pi_\perp^{(\perp)} + D_\perp^{(\perp)} + A_\perp^{(\perp)}}_{S_\perp^{(\perp)}} + TN_\perp^{(\perp)}, \quad (3.48)$$

avec

$$\varepsilon_\perp^{(\perp)} = \frac{\nu}{2} (\partial_\alpha u'_\beta + \partial_\beta u'_\alpha)^2, \quad D_\perp^{(\perp)} = \frac{\nu}{2} \nabla_\perp^2 \overline{\langle (\delta \mathbf{u}'_\perp)^2 \rangle}_{\mathbf{X}}, \quad (3.49)$$

$$\Pi_\perp^{(\perp)} = \frac{1}{4} \nabla_\perp \cdot \overline{\langle (\delta \mathbf{u}'_\perp)^2 \delta \mathbf{u}'_\perp \rangle}_{\mathbf{X}}, \quad A_\perp^{(\perp)} = -\frac{1}{4V_X} \oint_{S_X} \overline{\langle (\delta \mathbf{u}'_\perp)^2 \tilde{\mathbf{u}}'_\perp \rangle} \cdot d\mathbf{S}_X. \quad (3.50)$$

Le terme  $\varepsilon_\perp^{(\perp)}$  désigne la dissipation de la vitesse horizontale par le cisaillement horizontal (avec sommation sur  $\alpha, \beta = x, y$ ), tel que  $D_\perp^{(\perp)} = \overline{\langle \tilde{\varepsilon}_\perp^{(\perp)} \rangle}_{\mathbf{X}}$  pour  $(r_\perp \rightarrow 0)$ . Tous les termes de cette équation sont accessibles à partir des mesures dans le plan horizontal mis à part le terme  $TN_\perp^{(\perp)}$ . Ce dernier contient le terme visqueux inhomogène que nous négligeons (il a été mesuré deux ordres de grandeur plus faible que les autres termes), le terme de corrélation pression-vitesse

$$W_p = -\frac{1}{2V_X} \oint_{S_X} \overline{\langle p \delta \mathbf{u}'_\perp \rangle} \cdot d\mathbf{S}_X, \quad (3.51)$$

qui est négligeable devant le terme de transport  $A_\perp^{(\perp)}$  sous l'hypothèse d'homogénéité locale (cf. figure 3.4.2) et les termes de dérivées par rapport à  $r_z$  qui sont nuls pour une turbulence 2D.

De même que pour l'équation de KHM (3.43), l'équation (3.48) rend compte de la conservation de l'énergie horizontale cumulée. Pour s'affranchir de la difficulté d'interprétation des taux cumulés d'injection  $A_\perp^{(\perp)}$  et de dissipation  $D_\perp^{(\perp)} - \varepsilon_\perp^{(\perp)}$ , on définit alors la densité d'énergie horizontale

$$e^{(\perp)} = \frac{d}{dr_\perp} \overline{\langle (\delta \mathbf{u}_\perp)^2 \rangle}_{\mathbf{X}, \varphi}, \quad (3.52)$$

qui est régie, dans nos approximations, par l'équation

$$0 = -\frac{d}{dr_\perp} \langle \Pi_\perp^{(\perp)} \rangle_\varphi + \frac{d}{dr_\perp} \langle D_\perp^{(\perp)} \rangle_\varphi + \frac{d}{dr_\perp} \langle A_\perp^{(\perp)} \rangle_\varphi + TN_\perp^{(\perp)}, \quad (3.53)$$

avec  $\frac{d}{dr_\perp} \langle A_\perp^{(\perp)} \rangle_\varphi$  la densité de flux d'énergie injectée et  $\frac{d}{dr_\perp} \langle D_\perp^{(\perp)} \rangle_\varphi$  la densité de taux de dissipation d'énergie qui nous renseignent respectivement sur l'injection et la dissipation d'énergie horizontale à une échelle donnée.

La figure 3.15 représente les termes mesurables de l'équation pour l'énergie horizontale cumulée (3.48) et de l'équation pour la densité d'énergie horizontale (3.53).

On observe un bon accord entre  $\overline{\langle \tilde{\varepsilon}_\perp^{(\perp)} \rangle}_{\mathbf{X}}$  et la somme des termes de droite mesurables de

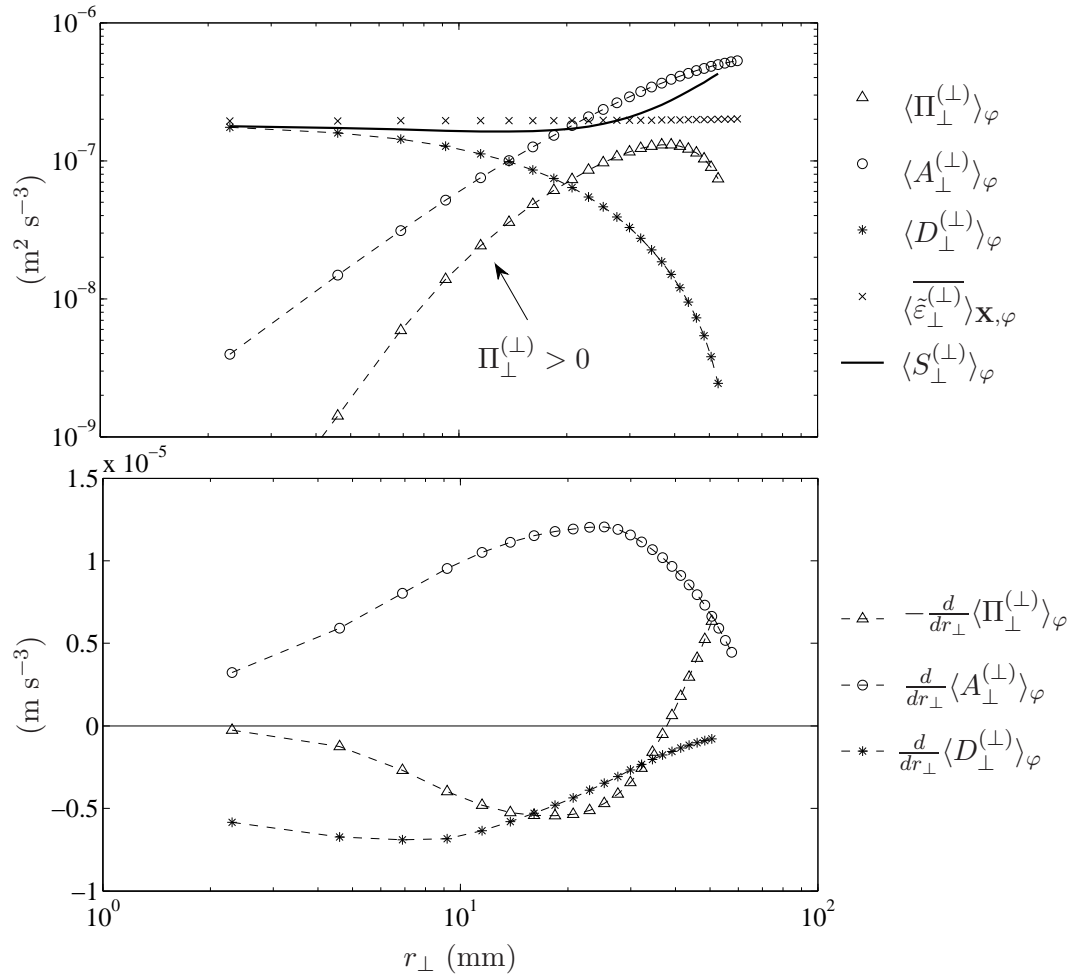


FIGURE 3.15 – Bilan des flux d'énergie échelle à échelle de l'énergie horizontale pour  $\Omega = 16 \text{ tr/min}$ .

### 3.4. BILAN D'ÉNERGIE ÉCHELLE À ÉCHELLE ET FORÇAGE INHOMOGÈNE

l'équation (3.48)  $S_{\perp}^{(\perp)} = \Pi_{\perp}^{(\perp)} + D_{\perp}^{(\perp)} + A_{\perp}^{(\perp)}$  à 20% près pour  $r_{\perp} \leq 40$  mm ce qui montre que les approximations de faible inhomogénéité, avec  $W_p$  (3.51) négligeable, et d'invariance verticale sont raisonnablement vérifiées à petite échelle. À plus grande échelle,  $\langle \overline{\varepsilon_{\perp}^{(\perp)}} \rangle_{\mathbf{X}}$  et  $S_{\perp}^{(\perp)}$  s'écartent en revanche fortement à mesure que  $r_{\perp}$  augmente avec  $S_{\perp}^{(\perp)} \simeq 2\langle \overline{\varepsilon_{\perp}^{(\perp)}} \rangle_{\mathbf{X}}$  pour  $r_{\perp} = 60$  mm. Cet écart significatif, tandis que le bilan d'énergie dans l'approximation axisymétrique à ce même taux de rotation (voir figure 3.14) montre une bonne fermeture, suggère que l'approximation 2D est mise en défaut à grande échelle horizontale. Cette dernière observation est de prime abord surprenante à la vue de la distribution d'énergie  $A_E$  qui est quasi 2D à grande échelle et qui se rapproche de l'isotropie à petite échelle (figure 3.5). Cependant, il est à noter que pour une turbulence statistiquement stationnaire, la distribution d'énergie  $E$  n'intervient dans l'équation de KHM<sub>i</sub> qu'à travers  $D$  si bien que le lien entre  $E$  et les termes de KHM<sub>i</sub> et de ce fait leur anisotropie, n'est pas directe.

Par la suite, on se concentrera sur les échelles inférieures à 40 mm. On observe que la densité d'injection d'énergie horizontale  $\frac{d}{dr_{\perp}} \langle A_{\perp}^{(\perp)} \rangle_{\varphi}$  est large bande et maximale pour  $r_{\perp} \simeq 20$  mm. Aux échelles inférieures à 10 mm la dissipation d'énergie  $|\frac{d}{dr_{\perp}} \langle D_{\perp}^{(\perp)} \rangle_{\varphi}|$  est du même ordre de grandeur que l'injection d'énergie  $\frac{d}{dr_{\perp}} \langle A_{\perp}^{(\perp)} \rangle_{\varphi}$ . À plus grande échelle, l'injection d'énergie domine cette fois la dissipation d'énergie et l'énergie flue vers les grandes échelles ( $\Pi_{\perp}^{(\perp)} > 0$ ). Pour une turbulence 2D pleinement développée à grand nombre de Reynolds, on s'attend à  $\Pi_{\perp}^{(\perp)} \simeq A_{\perp}^{(\perp)} \geq \langle \overline{\varepsilon_{\perp}^{(\perp)}} \rangle_{\mathbf{X}}$ . Dans notre expérience, le nombre de Reynolds est au contraire modéré et le transfert inverse est au mieux de l'ordre de grandeur de  $\langle \overline{\varepsilon_{\perp}^{(\perp)}} \rangle_{\mathbf{X}}$ .

#### Bilan d'énergie verticale

L'équation de KHM<sub>i</sub> pour l'énergie verticale dans la limite 2D s'exprime comme

$$\langle \overline{\varepsilon_{\perp}^{(\parallel)}} \rangle_{\mathbf{X}} = -\Pi_{\perp}^{(\parallel)} + D_{\perp}^{(\parallel)} + A_{\perp}^{(\parallel)} + TN_{\perp}^{(\parallel)}, \quad (3.54)$$

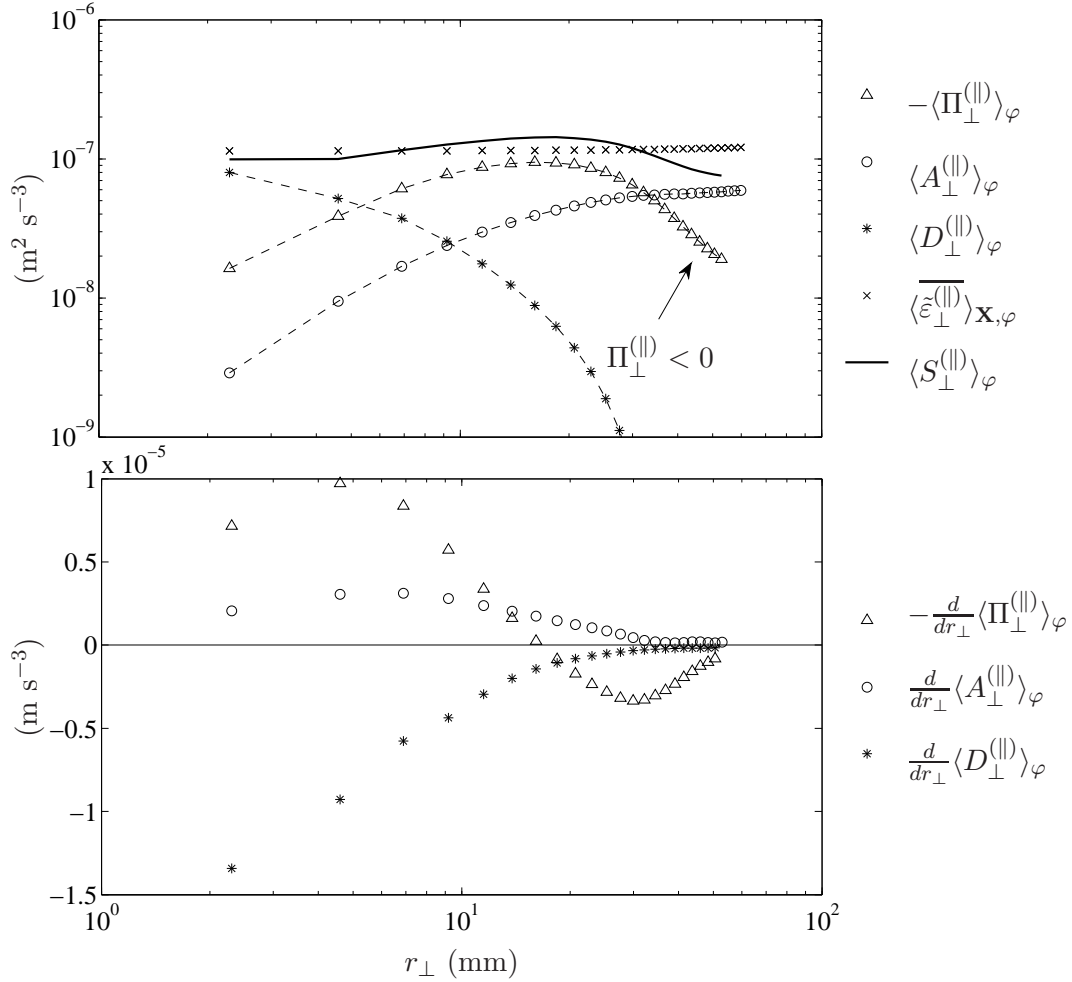
avec

$$\varepsilon_{\perp}^{(\parallel)} = \nu(\nabla_{\perp} u'_{\parallel})^2, \quad D_{\perp}^{(\parallel)} = \frac{\nu}{2} \nabla_{\perp}^2 \langle (\delta u'_{\parallel})^2 \rangle_{\mathbf{X}}, \quad (3.55)$$

$$\Pi_{\perp}^{(\parallel)} = \frac{1}{4} \nabla_{\perp} \cdot \langle (\delta \mathbf{u}'_{\parallel})^2 \delta \mathbf{u}'_{\perp} \rangle_{\mathbf{X}}, \quad A_{\perp}^{(\parallel)} = -\frac{1}{4V_X} \oint_{S_X} \overline{(\delta u'_{\parallel})^2 \tilde{\mathbf{u}}'_{\perp}} \cdot d\mathbf{S}_{\mathbf{X}}. \quad (3.56)$$

Le terme  $\varepsilon_{\perp}^{(\parallel)}$  représente la dissipation de la vitesse verticale par le cisaillement horizontal et vérifie  $D_{\perp}^{(\parallel)} = \langle \overline{\varepsilon_{\perp}^{(\parallel)}} \rangle_{\mathbf{X}}$  pour  $r_{\perp} \rightarrow 0$ . Le terme visqueux inhomogène contenu dans  $TN_{\perp}^{(\parallel)}$  est une fois de plus négligeable et ne sera pas considéré par soucis de simplicité. Une caractéristique clé de cette équation est qu'elle ne fait pas apparaître de terme de corrélation pression-vitesse, si bien que tous ses termes sont accessibles à partir des mesures par PIV stéréoscopique.

De même que pour les bilans d'énergie totale et d'énergie horizontale, l'équation (3.54) décrit la conservation de l'énergie verticale cumulée. Pour s'affranchir de la difficulté d'interprétation


 FIGURE 3.16 – Bilan des flux d'énergie échelle à échelle de l'énergie verticale pour  $\Omega = 16$  tr/min.

des quantités cumulées d'injection  $A_{\perp}^{(\parallel)}$  et de dissipation  $D_{\perp}^{(\parallel)} - \varepsilon_{\perp}^{(\parallel)}$ , on définit la densité d'énergie verticale

$$e^{(\parallel)} = \frac{d}{dr_{\perp}} \langle (\delta u_{\parallel})^2 \rangle_{\mathbf{x}, \varphi}, \quad (3.57)$$

dont la conservation est régie, dans nos approximations, par l'équation

$$0 = -\frac{d}{dr_{\perp}} \langle \Pi_{\perp}^{(\parallel)} \rangle_{\varphi} + \frac{d}{dr_{\perp}} \langle D_{\perp}^{(\parallel)} \rangle_{\varphi} + \frac{d}{dr_{\perp}} \langle A_{\perp}^{(\parallel)} \rangle_{\varphi} + T N_{\perp}^{(\parallel)}, \quad (3.58)$$

avec  $\frac{d}{dr_{\perp}} \langle A_{\perp}^{(\parallel)} \rangle_{\varphi}$  la densité de flux d'énergie injectée et  $\frac{d}{dr_{\perp}} \langle D_{\perp}^{(\parallel)} \rangle_{\varphi}$  la densité de taux de dissipation d'énergie qui nous renseignent respectivement sur l'injection et la dissipation d'énergie verticale à une échelle donnée.

### 3.4. BILAN D'ÉNERGIE ÉCHELLE À ÉCHELLE ET FORÇAGE INHOMOGÈNE

---

La figure 3.16 représente les termes mesurables de l'équation pour l'énergie verticale cumulée (3.54) et de l'équation pour la densité d'énergie verticale (3.58). On observe une fois de plus un bon accord à petite échelle entre la somme des termes de droite de l'équation (3.54)  $S_{\perp}^{(\parallel)} = \Pi_{\perp}^{(\parallel)} + D_{\perp}^{(\parallel)} + A_{\perp}^{(\parallel)}$  et  $\overline{\langle \varepsilon_{\perp}^{(\parallel)} \rangle_{\mathbf{X}}}$ . L'écart entre  $S_{\perp}^{(\parallel)}$  et  $\overline{\langle \varepsilon_{\perp}^{(\parallel)} \rangle_{\mathbf{X}}}$  aux grandes échelles horizontales s'interprète simplement ici comme un écart à la bidimensionnalité qui est la seule hypothèse dans la démonstration de (3.54).

On observe que la densité d'injection d'énergie verticale  $\frac{d}{dr_{\perp}} \langle A_{\perp}^{(\parallel)} \rangle_{\varphi}$  est large bande et maximale à  $r_{\perp} \simeq 7$  mm. Aux échelles inférieures à 10 mm la dissipation d'énergie domine légèrement l'injection d'énergie  $\frac{d}{dr_{\perp}} \langle A_{\perp}^{(\parallel)} \rangle_{\varphi} > |\frac{d}{dr_{\perp}} \langle D_{\perp}^{(\parallel)} \rangle_{\varphi}|$ . À plus grande échelle, l'injection d'énergie domine cette fois la dissipation d'énergie et un flux d'énergie direct alimente les petites échelles ( $\Pi_{\perp}^{(\parallel)} < 0$ ).

Nous avons observé plus tôt dans ce chapitre (figure 3.8) que les échelles horizontales  $L_{\perp}^{(\varphi)}$  et  $L_{\perp}^{(\parallel)}$  associées respectivement à la vitesse horizontale transverse et à la vitesse verticale, qui sont égales en l'absence de rotation, se différencient en présence de rotation avec  $L_{\perp}^{(\varphi)} > L_{\perp}^{(\parallel)}$ . Ceci est cohérent avec la mise en évidence ici d'un transfert inverse d'énergie horizontale qui tend à accroître fortement  $L_{\perp}^{(\varphi)}$  alors que l'énergie verticale est toujours transférée vers les petites échelles. On remarque ici que l'échelle à laquelle le transfert inverse  $\Pi_{\perp}^{(\perp)}$  est maximal (figure 3.15 haut) est compatible avec l'échelle intégrale  $L_{\perp}^{(\varphi)} \sim 35$  mm. En ce qui concerne l'énergie verticale qui flue vers les petites échelles, l'échelle intégrale  $L_{\perp}^{(\parallel)}$  est attendue à l'échelle de début de la cascade, i.e. l'échelle de fin du plateau de  $\Pi_{\perp}^{(\parallel)}$  (3.16 haut). On remarque effectivement que cette échelle coïncide plutôt bien avec  $L_{\perp}^{(\parallel)} \sim 20$  mm.

#### 3.4.6 Dissipation à grande échelle

Au plus grand taux de rotation, le scénario d'un transfert inverse d'énergie horizontale est bien établi dans notre zone de contrôle pour les échelles inférieures à 40 mm (figures 3.15). Aux échelles plus grandes, où la dissipation d'énergie est négligeable, le terme d'injection cumulée d'énergie dans la zone de contrôle est supérieur à la dissipation d'énergie. La stationnarité de l'écoulement impose cependant qu'en moyenne statistique, l'injection d'énergie dans la zone de contrôle soit égale à la dissipation d'énergie. On s'attend donc à ce que le terme d'injection d'énergie décroisse aux échelles plus grandes que celles étudiées pour finalement tendre vers la valeur du taux de dissipation. Une telle décroissance de  $A_{\perp}^{(\perp)}(r_{\perp})$  aux grandes échelles aurait pour interprétation une extraction d'énergie (et non une dissipation) du volume de contrôle par les flux spatiaux. Elle serait associée au fait qu'en moyenne les grandes structures sortent de la zone de contrôle. Un mécanisme de dissipation de ces grandes structures, en dehors de la zone de contrôle, est finalement attendu pour maintenir la stationnarité statistique de l'écoulement dans sa globalité et non plus seulement dans la zone de contrôle. Nous proposons dans cette section deux mécanismes possibles de dissipation de l'énergie associée à ces grandes échelles dans notre expérience.



**Couche d'Ekman** Un premier candidat est la dissipation dans les couches limites d'Ekman [16] sur les frontières horizontales (fond de l'aquarium et hublot supérieur dans notre expérience). Si on suppose que ces couches d'Ekman restent laminaires, leur épaisseur est de  $\delta_E = \sqrt{\nu/\Omega}$  et le taux de dissipation de l'énergie dans celles-ci est typiquement  $\nu U_{\perp,\text{rms}}^2/\delta_E^2$ .  $U_{\perp,\text{rms}}$  est ici la vitesse horizontale rms qui constitue une bonne estimation de la vitesse typique des structures quasi-2D à grandes échelles de l'écoulement. Le taux de dissipation volumique équivalent induit par les couches d'Ekman sur l'ensemble de l'écoulement est donc de

$$\varepsilon_\Omega = \nu \frac{U_{\perp,\text{rms}}^2}{\delta_E^2} \frac{\delta_E}{H} = \frac{\sqrt{\nu\Omega} U_{\perp,\text{rms}}^2}{H}, \quad (3.59)$$

avec  $H = 50$  cm la hauteur d'eau. La figure 3.17 (b) montre que  $\varepsilon_\Omega$  (qui ne constitue qu'un ordre de grandeur et non une mesure) croît plus fortement avec  $\Omega$  que la dissipation volumique dans la zone de contrôle (qui elle est issue d'une mesure directe). Aux taux de rotation étudiés, cette dissipation dans les couches d'Ekman restent cependant limitée : elle vaut moins d'un dixième de la dissipation dans la zone de contrôle pour  $\Omega \leq 4$  tr/min et environ un quart pour  $\Omega = 16$  tr/min. Au plus grand taux de rotation,  $\varepsilon_\Omega$  est de l'ordre de grandeur de l'intensité des transferts inverses d'énergie (voir figure 3.15). On rappelle que cet ordre de grandeur a été obtenu dans l'hypothèse d'une couche limite laminaire. Pour une couche limite turbulente la dissipation  $\varepsilon_\Omega$  serait encore plus importante. La dissipation d'énergie dans les couches d'Ekman constitue donc un candidat crédible pour interpréter la dissipation de l'énergie extraite de la zone de contrôle à grandes échelles par des flux spatiaux.

**Rétro-action sur le forçage** Une autre explication à l'extraction d'énergie à grande échelle pourrait être une rétro-action de l'écoulement sur le dispositif de forçage. L'écoulement à grande échelle alimenté par les transferts inverses pourrait induire des forces de pression sur les volets des générateurs se soldant par un travail négatif. La validation ou non d'un tel scénario nécessiterait la mesure de la puissance injectée par le dispositif de forçage qui est très difficile en pratique car la puissance injectée dans les mouvements du fluide est a priori petite devant la puissance consommée par les frottements solides des pièces mécaniques qui mettent en mouvement les volets.

### 3.4.7 Modes 2D et 3D

L'apparition graduelle d'un transfert d'énergie inverse à mesure que le taux de rotation augmente suggère l'émergence d'un mode 2D de plus en plus important. On peut quantifier l'importance de cette contribution 2D en décomposant le champ de vitesse  $\mathbf{u}$  mesurée dans le plan vertical en un mode 2D et un mode 3D

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{2D} + \mathbf{u}_{3D}, \quad (3.60)$$

$$\mathbf{u}_{2D} = \frac{1}{\Delta z} \int_0^{\Delta z} \mathbf{u} dz, \quad (3.61)$$

### 3.4. BILAN D'ÉNERGIE ÉCHELLE À ÉCHELLE ET FORÇAGE INHOMOGÈNE

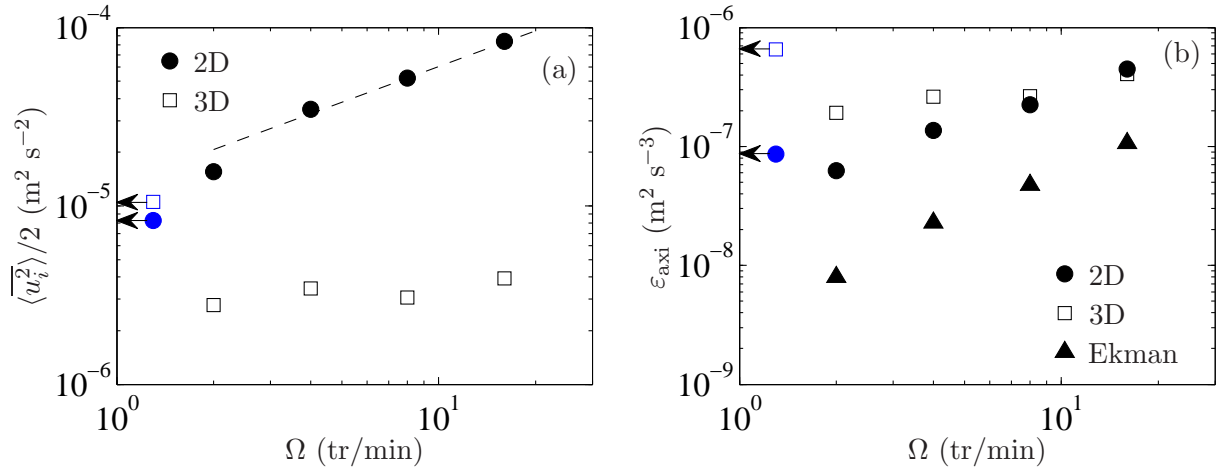


FIGURE 3.17 – (a) Énergies et (b) taux de dissipation massiques des modes 2D et 3D en fonction du taux de rotation  $\Omega$ . Dans les deux figures, les données fléchées correspondent au cas sans rotation  $\Omega = 0$ .

avec  $\Delta z = 14$  cm l'extension verticale des champs de vitesse mesurés. Il faut noter que, de par la hauteur finie des champs de PIV, l'énergie du mode 2D ainsi estimée est sans doute surévaluée car elle prend aussi en compte les fluctuations associées aux échelles supérieures à  $\Delta z$ . Les énergies par unité de masse contenues dans le mode 2D  $\langle \mathbf{u}_{2D}^2 \rangle_{\mathbf{x}}/2$  et dans le mode 3D  $\langle \mathbf{u}_{3D}^2 \rangle_{\mathbf{x}}/2$  sont reportées dans la figure 3.17 (a). En l'absence de rotation, l'énergie se répartit de manière comparable entre le mode 2D et le mode 3D. À mesure que la rotation augmente, l'énergie du mode 2D croît. L'énergie 3D, quant à elle, décroît fortement entre le cas non tournant et tournant puis est quasi-constante avec  $\Omega$ . Au plus grand taux de rotation l'énergie 3D est finalement vingt fois plus faible que l'énergie 2D.

Même si l'énergie est essentiellement contenue dans le mode 2D en présence de rotation, le mode 3D contribue cependant toujours fortement à la dissipation volumique d'énergie. En supposant l'axisymétrie des gradients de vitesse, on peut estimer le taux de dissipation à partir des mesures dans le plan vertical comme

$$\varepsilon_{\text{axi}} \simeq \left\langle 2\overline{(\partial_x u_x)^2} + 2\overline{(\partial_x u_y)^2} + 2\overline{(\partial_x u_z)^2} + \overline{(\partial_z u_x)^2} + \overline{(\partial_z u_y)^2} + \overline{(\partial_z u_z)^2} \right\rangle_{\mathbf{x}} \quad (3.62)$$

Ce taux de dissipation, calculé pour  $\mathbf{u}_{2D}$  et  $\mathbf{u}_{3D}$ , est reporté dans la figure 3.17 (b). De manière remarquable, la contribution du mode 3D au taux de dissipation est du même ordre de grandeur voire supérieure à la contribution du mode 2D, même lorsque le mode 3D est très peu énergétique. Ce résultat met en évidence le fait que le mode 3D possède toujours un rôle important dans la dynamique de notre écoulement et ce même au plus grand taux de rotation étudié.

Les bilans d'énergie en échelles dans le plan horizontal que nous avons présentés dans ce chapitre ne font pas la distinction entre modes 2D et 3D si bien que les termes de KHM<sub>i</sub> mesurés résultent des contributions des modes 3D et 2D. La dissipation 3D présentée à la figure 3.17 (b)

doit nécessairement être alimentée par des flux d'énergie 3D en espace et/ou en échelle. La valeur élevée de  $\varepsilon_{3D}$  nous indique que notre turbulence contient des flux d'énergie 3D importants, même à forte rotation. L'importance de ces flux 3D dans la dissipation d'énergie met ainsi en évidence une des différences fondamentales qui distingue la *vraie* turbulence 2D de la turbulence en rotation quasi-2D. Ce mode 3D sera analysé à la lumière des modèles de turbulence d'onde d'inertie dans le chapitre suivant.

### 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous apportons des preuves expérimentales à la présence d'un double transfert d'énergie en turbulence en rotation avec un transfert direct aux petites échelles et un transfert inverse aux grandes échelles. Contrairement aux précédentes observations expérimentales de transferts inverses d'énergie en turbulence en rotation [52–54], nous apportons ici des mesures directes des transferts d'énergie échelle à échelle dans le plan horizontal. La mesure des trois composantes de la vitesse nous permet de distinguer les transferts d'énergie horizontale des transferts d'énergie verticale. En l'absence de rotation, l'énergie horizontale et l'énergie verticale sont transférées vers les petites échelles, comme attendu pour une turbulence 3D sans rotation. À forte rotation, l'énergie verticale est toujours transférée vers les petites échelles alors que l'énergie horizontale est elle, transférée vers les grandes échelles. Ce comportement est compatible avec celui d'une turbulence 2D3C associée à une cascade inverse de l'énergie horizontale, la vitesse verticale se comportant comme un scalaire passif advecté par la vitesse horizontale. Enfin, à taux de rotation intermédiaire, on observe une coexistence de la physique des transferts de la turbulence 3D et 2D avec des transferts directs de l'énergie horizontale à petite échelle et des transferts inverses à grande échelle.

Contrairement à la plupart des simulations numériques où l'énergie est apportée par un forçage volumique dans une gamme d'échelle restreinte, dans la plupart des expériences et écoulements naturels l'énergie est apportée à travers des conditions aux limites en mouvement et est ensuite transportée spatialement dans le volume de contrôle où la question des transferts d'énergie entre échelles est considérée. Ce flux spatial, qui est intrinsèquement lié aux inhomogénéités de l'écoulement, est a priori large bande, tout simplement parce que l'écoulement est déjà turbulent en dehors du volume de contrôle. Ces spécificités des écoulements "réels" autorisent la coexistence aux mêmes échelles d'un flux spatial et de transferts d'énergie échelle à échelle. Il est donc important de séparer ces deux contributions afin de pouvoir interpréter de manière fiable les transferts d'énergie dans de tels systèmes. Nous avons réalisé ce type d'analyse à partir de la généralisation inhomogène de l'équation de Kármán-Howarth-Monin. La difficulté principale de cette généralisation est liée à l'apparition d'un terme de corrélation pression-vitesse dans l'équation de KHM<sub>i</sub> qui empêche une interprétation physique claire des termes de transport spatial et de transferts entre échelles dans le cas général. Cependant, dans notre expérience, l'effet des inhomogénéités est faible aux échelles considérées et la corrélation pression-vitesse est négligeable. Le terme de transport spatial montre une injection d'énergie sur une large gamme

### 3.5. CONCLUSION

---

d'échelles qui varie avec le taux de rotation. L'injection d'énergie dans la zone de contrôle résulte de la géométrie du forçage mais aussi de toute l'histoire (dissipation, diffusion, transferts  $\dots$ ) que les fluctuations turbulentes subissent entre les générateurs et la zone de contrôle. Ces transformations dépendent évidemment fortement des paramètres locaux ( $Re$ ,  $Ro \dots$ ) qui varient spatialement entre les générateurs et la frontière de la zone de contrôle, ce qui rend la modélisation de l'injection très complexe.



## Chapitre 4

# Structures spatio-temporelles et ondes d'inertie

### 4.1 Introduction

Nous avons mis en évidence, au chapitre précédent, l'émergence liée à la rotation d'un mode 2D très énergétique (figure 3.17 (a)) ainsi que de transferts inverses d'énergie qui lui sont associés (figure 3.10 (b)). Ces résultats pourraient laisser penser qu'à grand taux de rotation, la dynamique de l'écoulement se confond avec celle d'une turbulence 2D. On peut cependant remarquer que la dissipation volumique d'énergie associée au mode 3D de l'écoulement, bien que celui-ci soit énergétiquement faible, est du même ordre de grandeur voire supérieure à la dissipation volumique associée au mode 2D (figure 3.17 (b)). Le mode 3D possède ainsi toujours un rôle majeur dans la dynamique de l'écoulement.

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons particulièrement à ce mode 3D dont on cherchera à comprendre la structure spatio-temporelle. L'accent sera mis sur la recherche du domaine d'échelles spatiales et temporelles où il est constitué d'une assemblée d'ondes d'inertie. Nous chercherons pour cela à caractériser la distribution de l'énergie turbulente entre les échelles spatio-temporelles dans le but de détecter une concentration d'énergie sur la relation de dispersion des ondes

$$\sigma = \pm 2\Omega \cdot \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}. \quad (4.1)$$

Comme déjà évoquée dans l'introduction générale, cette relation de dispersion impose que la fréquence de l'onde  $\sigma$  fixe uniquement la direction de son vecteur d'onde mais pas sa longueur d'onde. La détection d'ondes d'inertie linéaires au sein d'un écoulement turbulent nécessite donc a priori une analyse spatio-temporelle 4D (1D en temps et 3D en espace) permettant d'accéder à l'orientation dans l'espace 3D des vecteurs d'onde  $\mathbf{k}$  ou des échelles orientées  $\mathbf{r}$ , analyse qui est particulièrement difficile à mettre en place expérimentalement. Une telle analyse 4D a été réalisée récemment par Yarom et Sharon [56] sur les deux composantes horizontales de la vitesse

d'une turbulence forcée en rotation. Ils ont alors pu mettre en évidence la présence d'ondes d'inertie (voir section 1.4.4). Dans notre étude, nous avons accès de manière instantanée aux trois composantes de la vitesse mais seulement dans deux dimensions d'espace. Néanmoins, l'axi-symétrie statistique de l'écoulement permet de rendre pertinente cette analyse spatio-temporelle réduite à deux dimensions spatiales. Nous nous focaliserons sur la signature des ondes d'inertie sur l'anisotropie de la distribution 2D d'énergie associée à chaque fréquence temporelle. Le fait que l'écoulement turbulent soit constitué d'une superposition d'ondes d'inertie en interaction non-linéaire infiniment faible constitue l'hypothèse de base des modèles de type AQNM [17, 23] et de turbulence d'ondes d'inertie [24–27], qui ont pour ambition de décrire la turbulence soumise à une rotation infiniment forte, i.e.  $Ro \rightarrow 0$ . Ces modèles étant cependant parmi les seuls permettant de prédire des lois d'échelle pour les spectres spatiaux d'énergie ou pour le taux de dissipation de l'énergie en turbulence en rotation, il est tentant d'essayer de les utiliser y compris sous une rotation modérée, i.e. à nombre de Rossby fini, où ils ne s'appliquent plus forcément. Dans ce chapitre, on se propose de tester sur l'exemple de notre expérience la pertinence de ce type de modèle vis-à-vis de leur hypothèse de base pour décrire un écoulement fortement non-linéaires.

## 4.2 Analyse temporelle

### 4.2.1 Temps caractéristiques

Nous nous proposons dans un premier temps de rappeler les temps caractéristiques associés aux différents processus à l'œuvre en turbulence. On considère tout d'abord une turbulence homogène et isotrope (2D ou 3D) pour laquelle les temps caractéristiques associés à une échelle  $1/k$  sont [55]

1. le temps de dissipation visqueuse  $\tau_\nu = (\nu k^2)^{-1}$ ,
2. le temps non-linéaire  $\tau_{nl} = (kU_k)^{-1}$  avec  $U_k \sim \sqrt{ke(k)}$  la vitesse typique associée à l'échelle  $1/k$  et  $e(k)$  le spectre spatial d'énergie 1D,
3. le temps de balayage (*sweeping time* en anglais)  $\tau_{sw} = (kU)^{-1}$  : c'est le temps caractéristique apparent d'une structure de taille  $1/k$  balayée par une vitesse à grande échelle  $U$ . On peut remarquer que le temps non-linéaire  $\tau_{nl}$  constitue la version locale du temps de balayage  $\tau_{sw}$  dans le sens où il est piloté par la vitesse locale  $U_k$  à l'échelle  $k$ .

À une échelle  $1/k$  donnée, le processus dominant est celui associé au temps le plus court  $\tau_D(k) = \min(\tau_\nu(k), \tau_{nl}(k), \tau_{sw}(k))$ . Ces trois temps étant tous décroissants avec  $k$ , le temps  $\tau_D(k)$  l'est donc également. Cette monotonie permet d'associer une échelle temporelle  $1/\sigma$  à une seule échelle spatiale et inversement. Autrement dit, l'énergie  $U_\sigma^2$  associée à la fréquence  $\sigma$  peut être identifiée à l'énergie  $U_k^2$  associée à l'échelle  $1/k$ . Par analyse dimensionnelle, on relie alors le spectre temporel d'énergie  $E(\sigma)$  au spectre spatial d'énergie  $e(k)$  comme

$$\sigma E(\sigma) \sim ke(k). \quad (4.2)$$

## 4.2. ANALYSE TEMPORELLE

---

Le temps visqueux  $\tau_\nu$  décroît avec  $k$  plus rapidement que les deux autres temps caractéristiques : la dynamique sera donc toujours dominée par les effets visqueux aux plus petites échelles. Dans la gamme inertielle, les effets de la viscosité sont au contraire négligeables. Il convient alors de comparer le temps non-linéaire au temps de balayage. À partir des lois d'échelles connues pour le spectre spatial d'énergie dans la gamme inertielle  $e(k) \sim P^{2/3}k^{-5/3}$  où  $P$  est la puissance injectée et en évaluant la vitesse  $U$  responsable du balayage comme la vitesse  $U_{k_0}$  associée à la plus grande échelle de l'écoulement  $1/k_0$ , on peut estimer l'ordre de grandeur des temps non-linéaire et de balayage à l'échelle  $1/k$

$$\tau_{nl}(k) \sim P^{-1/3}k^{-2/3}, \quad (4.3)$$

$$\tau_{sw}(k) \sim P^{-1/3}k_0^{1/3}k^{-1} \sim \tau_{nl} \left( \frac{k_0}{k} \right)^{1/3}. \quad (4.4)$$

On en déduit que dans la gamme inertielle ( $k \gg k_0$ ), le taux d'évolution de la vitesse eulérienne est toujours piloté par l'effet de balayage par les grandes échelles ( $\tau_{sw} \ll \tau_{nl}, \tau_\nu$ ) [77–80]. En substituant  $\sigma = 1/\tau_{sw}$  dans l'équation (4.2) on en déduit le spectre temporel de l'énergie

$$E(\sigma) \sim U^{2/3}P^{2/3}\sigma^{-5/3}. \quad (4.5)$$

On peut noter le cas de la vitesse lagrangienne qui s'affranchit des effets de balayage. Sa dynamique est alors contrainte par le temps non-linéaire ( $\sigma \sim 1/\tau_{nl}$ ) et est associée à un spectre temporel d'énergie

$$E(\sigma) \sim P\sigma^{-2}. \quad (4.6)$$

**Turbulence d'ondes d'inertie** Pour une turbulence d'ondes d'inertie, la relation entre fréquence et vecteur d'onde est cette fois déterminée par la relation de dispersion des ondes. Celle-ci ne fait pas intervenir le nombre d'onde  $k$ , si bien que la relation entre spectre temporel et spectre spatial 1D (4.2) établie précédemment ne tient plus. Néanmoins, elle impose une relation entre la fréquence et l'angle du vecteur d'onde  $\sigma = \pm 2\Omega \cos \theta$ . Par conservation de la densité d'énergie, on établit ainsi la relation

$$E(\sigma) \sim e(\theta)|d\theta/d\sigma| = \frac{e(\theta)}{2\Omega \sin(\theta)}, \quad (4.7)$$

avec  $e(\theta)$  le spectre d'énergie angulaire défini comme l'intégrale sur  $k$  et  $\varphi$  du spectre spatial 3D de l'énergie

$$e(\theta) = \int_0^{2\pi} \int_{k_{min}(\theta)}^{k_{max}(\theta)} e_{3D}(k, \theta, \varphi) k^2 dk d\varphi \sin(\theta). \quad (4.8)$$

Les bornes d'intégration en  $k$  correspondent à la gamme de nombres d'onde énergétiques. Pour une turbulence d'ondes d'inertie et dans la limite  $\theta \sim \pi/2$ , i.e.  $k \simeq k_\perp \gg k_\parallel = k \cos \theta = k\sigma/2\Omega$ ,



Galtier [27] prédit le spectre 3D d'énergie

$$e_{3D} \sim (\varepsilon \Omega)^{1/2} k_{\perp}^{-7/2} k_{\parallel}^{-1/2} \sim \varepsilon^{1/2} \Omega k^{-4} \sigma^{-1/2}, \quad (4.9)$$

$\varepsilon$  étant le taux de dissipation moyen. En substituant l'équation (4.9) dans les équations (4.7) et (4.8) on en déduit le spectre temporel

$$E(\sigma) \sim \varepsilon^{1/2} \sigma^{-1/2} \int_{k_{min}(\theta)}^{k_{max}(\theta)} k^{-2} dk \quad (4.10)$$

$$\sim \varepsilon^{1/2} \sigma^{-1/2} \left( \frac{1}{k_{min}(\theta)} - \frac{1}{k_{max}(\theta)} \right). \quad (4.11)$$

L'hypothèse de turbulence d'ondes conduit donc à un spectre temporel en  $\sigma^{-1/2}$ . On remarque toutefois que ce résultat peut être affecté de façon non triviale par le choix des bornes d'intégration en  $k$ . Les nombres d'ondes  $k_{min}(\theta)$  et  $k_{max}(\theta)$  ont a priori une dépendance avec  $\theta$  et dépendent sans doute fortement des détails du mécanisme d'injection.

En première approximation, considérons un forçage au nombre d'onde  $k_{inj}$  large bande en fréquence  $\sigma$ , i.e. large gamme en  $\theta$ . En turbulence d'ondes d'inertie, l'énergie se transfère vers les petites échelles. On peut de ce fait supposer que  $k_{min}(\theta) = k_{inj}$ . En nous plaçant également dans la limite  $Re \gg 1$  où l'énergie se distribue sur une large gamme d'échelle, on peut supposer que  $k_{max} \gg k_{min}$ . On obtient finalement le spectre

$$E(\sigma) \sim \varepsilon^{1/2} k_{inj}^{-1} \sigma^{-1/2}. \quad (4.12)$$

La turbulence en rotation modérée est constituée, quant à elle, d'un entremêlement complexe de structures turbulentes anisotropes et d'ondes d'inertie. Il est alors intéressant de se demander comment la dynamique de la vitesse et donc le spectre temporel  $E(\sigma)$  sont modifiés à nombre de Rossby modéré.

#### 4.2.2 Spectre temporel

On définit le spectre temporel d'énergie évalué sur l'intervalle de temps  $[t_0, t_0 + \Delta T]$  comme

$$E_{\text{int}}(\sigma, t_0, \Delta T) = \frac{4\pi}{\Delta T} \langle |\hat{u}_i(\mathbf{x}, \sigma, t_0, \Delta T)|^2 \rangle_{\mathbf{x}}, \quad (4.13)$$

où

$$\hat{u}_i(\mathbf{x}, \sigma, t_0, \Delta T) = \frac{1}{2\pi} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta T} u_i(\mathbf{x}, t) e^{-i\sigma t} dt \quad (4.14)$$

est la transformée de Fourier temporelle du champ de vitesse  $u_i(\mathbf{x}, t)$  (avec  $i = x, y, z$ ) et  $\langle \cdot \rangle_{\mathbf{x}}$  la moyenne spatiale. La normalisation est telle que l'intégrale du spectre est égale à l'énergie moyenne :  $\langle \overline{u_i^2} \rangle_{\mathbf{x}} = \int_0^\infty E_{\text{int}} d\sigma$  avec  $\overline{\cdot}$  qui désigne la moyenne temporelle.

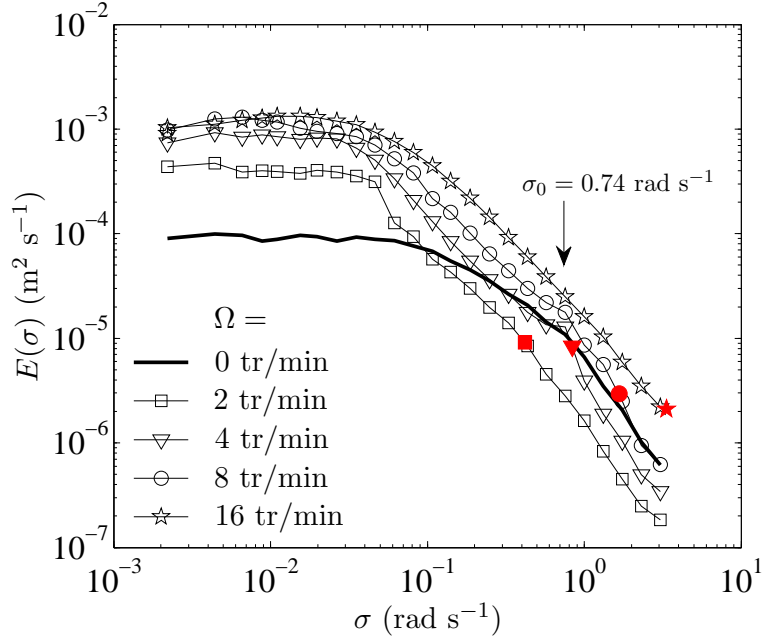


FIGURE 4.1 – Spectre temporel d'énergie  $E(\sigma)$  en fonction de la pulsation  $\sigma$  pour différents taux de rotation.  $\sigma_0 = 2\pi/T_0$  indique la pulsation du cycle d'ouverture-fermeture des générateurs. La fréquence de Coriolis  $2\Omega$  est mise en évidence par les symboles pleins.

Nous évaluons le spectre temporel  $E(\sigma)$  avec la méthode de Welch [81] afin d'en améliorer la convergence statistique. On détermine le spectre  $E$  comme la moyenne de  $n$  spectres  $E_{\text{int}}$  calculés respectivement sur  $n$  intervalles de longueur  $\Delta T = 2T/(n+1)$  ( $T$  est le temps d'acquisition) avec un recouvrement des intervalles de 50% :

$$E(\sigma) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E_{\text{int}}(\sigma, t_i, \Delta T), \quad (4.15)$$

$$t_i = (i-1)\Delta T/2. \quad (4.16)$$

Le choix du nombre  $n$  de segments influence la fréquence la plus faible accessible  $\sigma_{\text{min}} = 2\pi/\Delta T$ . Un grand nombre de segments permet d'obtenir une meilleure convergence du spectre mais restreint le gamme de fréquence accessible (et vice versa). Il faut donc trouver un compromis entre la convergence statistique et la gamme de fréquence accessible. Nous avons choisi  $n = 19$  si bien que  $\Delta T = T/10$  et  $\sigma_{\text{min}} \simeq 2 \cdot 10^{-3} \text{ rad s}^{-1}$ .

Le spectre temporel est tracé pour différents taux de rotation à la figure 4.1. Pour  $\Omega \neq 0$ , on remarque que l'énergie croît avec  $\Omega$  à toutes les fréquences  $\sigma$ , en accord avec l'augmentation de l'énergie totale avec  $\Omega$  observée à la figure 3.17 (a). On observe également que la forme des spectres pour  $\Omega \neq 0$  diffère fortement de celle du spectre dans le cas non-tournant, avec relativement plus d'énergie aux basses fréquences : la rotation induit une dynamique lente.

La fréquence en dessous de laquelle le champ de vitesse perd sa cohérence temporelle (limite

du plateau) est de l'ordre de  $5 \cdot 10^{-2} \text{ rad s}^{-1}$ , ce qui correspond à un temps de décorrélation d'environ 2 min. L'émergence de cette dynamique lente en présence de rotation est en pratique déjà visible sur l'évolution temporelle de la vitesse horizontale en un point (figure 2.8). Ce signal temporel montre également des bouffées énergétiques de l'ordre de la minute en présence de rotation compatibles avec le temps de décorrélation.

### 4.2.3 Anisotropie componentielle

Une première description de l'anisotropie de l'écoulement dans le domaine des fréquences temporelles peut être apportée en décomposant le spectre d'énergie en un spectre de l'énergie horizontale  $E^{(\perp)} = \frac{4\pi}{\Delta T} (\langle |\hat{u}_x|^2 \rangle + \langle |\hat{u}_y|^2 \rangle)$  et en un spectre de l'énergie verticale  $E^{(\parallel)} = \frac{4\pi}{\Delta T} \langle |\hat{u}_z|^2 \rangle$  tels que

$$E(\sigma) = E^{(\perp)} + E^{(\parallel)}. \quad (4.17)$$

L'opérateur  $\langle \cdot \rangle$  indique la moyenne spatiale ainsi que l'utilisation de la méthode de Welch. Cette décomposition permet de mettre en évidence l'anisotropie componentielle de la turbulence en évaluant comment l'énergie associée à la fréquence  $\sigma$  est distribuée entre les composantes de la vitesse. Elle est proche de l'anisotropie de polarisation qui évalue, pour chaque mode de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ , comment l'énergie est distribuée entre la composante poloïdale de la vitesse (i.e. dans le plan contenant  $\boldsymbol{\Omega}$  et  $\mathbf{k}$ ) et la composante toroïdale (i.e. perpendiculaire à  $\boldsymbol{\Omega}$  et  $\mathbf{k}$ ) [23, 38, 82]. Il ne faut pas la confondre avec l'anisotropie dimensionnelle qui compare les échelles caractéristiques verticales et horizontales (décrite à la section 4.3).

Les spectres temporels  $E^{(\perp)}/2$  et  $E^{(\parallel)}$  sont représentés à la figure 4.2. En l'absence de rotation, l'énergie est distribuée de manière quasi-égale entre les 3 composantes ( $E^{(\perp)} \simeq 2E^{(\parallel)}$ ) avec toutefois une légère sur-représentation de l'énergie horizontale. Ceci est compréhensible au vu de la géométrie de notre dispositif de forçage qui injecte préférentiellement l'énergie dans les composantes horizontales de la vitesse.

En présence de rotation, on remarque que l'énergie reste équi-répartie entre les trois composantes de la vitesse à haute fréquence. La répartition d'énergie aux basses fréquences devient en revanche de plus en plus anisotrope à mesure que  $\Omega$  augmente,  $E^{(\parallel)}$  étant approximativement constant et  $E^{(\perp)}$  approchant une loi de puissance  $\sigma^{-5/3}$ . Cette anisotropie croissante est liée au fait que la fréquence de décorrélation de la vitesse horizontale  $\sigma_{\text{dec}}^{(\perp)} = 0.04 \pm 0.01 \text{ rad s}^{-1}$  devient significativement plus faible que la fréquence de décorrélation de la vitesse verticale  $\sigma_{\text{dec}}^{(\parallel)}$  qui croît de 0.05 à 0.40  $\text{rad s}^{-1}$  pour  $\Omega$  allant de 2 à 16 tr/min.

On quantifie à présent l'anisotropie componentielle à partir du paramètre

$$A_C(\sigma) = \frac{2E^{(\parallel)}}{E^{(\perp)}}. \quad (4.18)$$

Il vaut 1 pour une répartition isotrope de l'énergie entre les composantes, 0 lorsque toute l'énergie est contenue dans les composantes horizontales du champ de vitesse et l'infini lorsqu'elle est

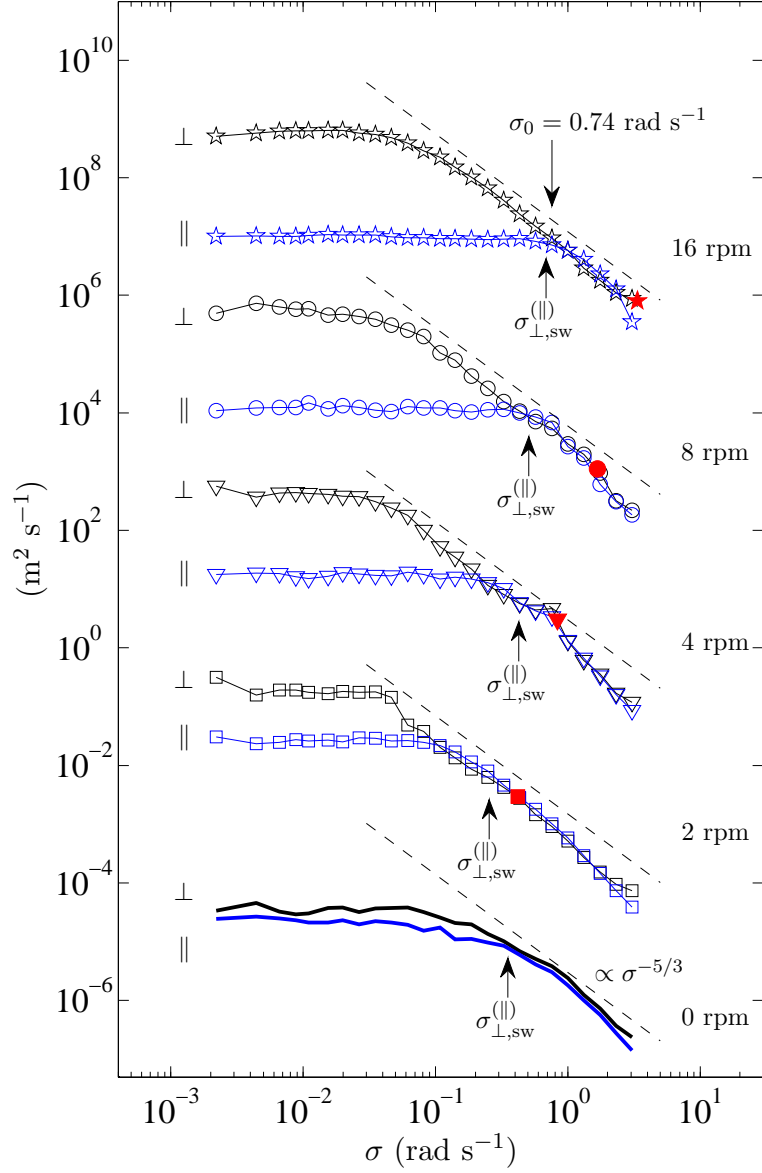


FIGURE 4.2 – Spectre temporel d'énergie horizontale  $E^{(\perp)}/2$  et verticale  $E^{(||)}$  en fonction de la fréquence angulaire temporelle  $\sigma$  pour différents taux de rotation. Par soucis de clarté, les courbes aux différents taux de rotation sont décalées d'un facteur  $10^3$  en ordonnée. Les lignes tiretées indiquent la loi de puissance  $\sigma^{-5/3}$ . La fréquence de Coriolis  $2\Omega$  est mise en évidence par les symboles pleins rouges.

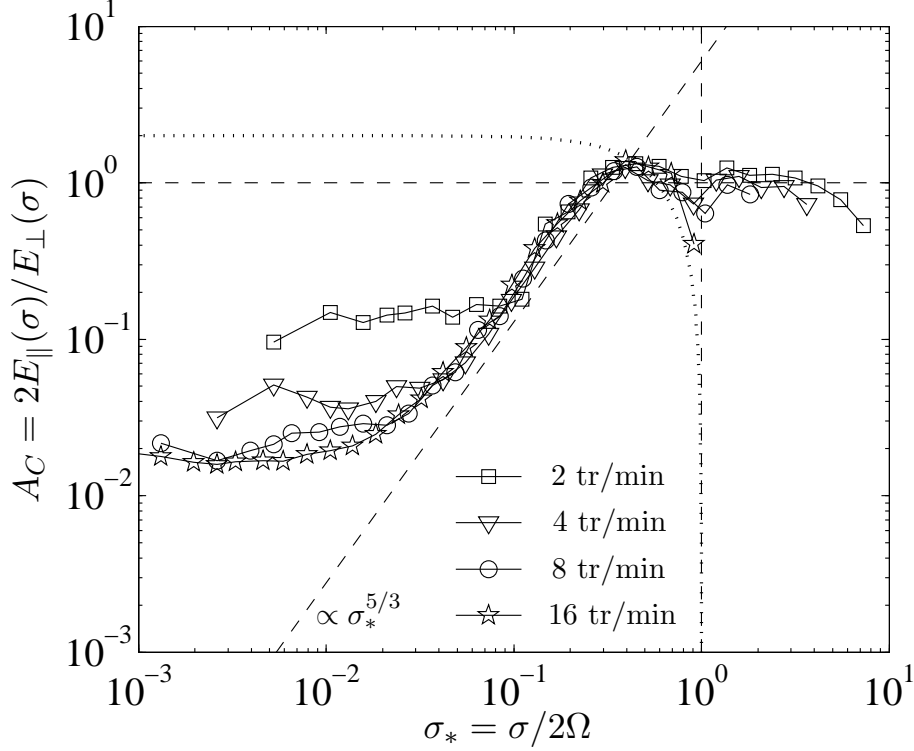


FIGURE 4.3 – Paramètre d'anisotropie componentielle  $A_C$  en fonction de la fréquence normalisée  $\sigma_*$ . La courbe en pointillés représente la prédiction de l'anisotropie pour une onde plane d'inertie  $2(1 - \sigma_*^2)/(1 + \sigma_*^2)$ .

contenue uniquement dans la composante verticale. Le paramètre d'anisotropie componentielle est représenté en fonction de la fréquence normalisée  $\sigma_* = \sigma/2\Omega$  à la figure 4.3. On remarque que les données se rassemblent sur une courbe maîtresse  $A_C = f(\sigma_*)$  pour  $\sigma_* > \sigma_{\text{dec}}^{(\perp)}/2\Omega$  indiquant que la fréquence normalisée pilote l'anisotropie componentielle. À fréquence normalisée supérieure à l'unité, pour laquelle les ondes d'inertie ne peuvent exister, l'énergie est répartie de manière quasi-isotrope ( $A_C \simeq 1$ ) entre les composantes de la vitesse. Pour  $\sigma_* < 1$ , on observe une gamme de fréquences où  $A_C$  suit une loi de puissance  $\sigma_*^{5/3}$ . Cette gamme correspond aux fréquences comprises entre les fréquences de décorrélation de la vitesse horizontale et de la vitesse verticale ( $\sigma_{\text{dec}}^{(\perp)}/2\Omega < \sigma_* < \sigma_{\text{dec}}^{(\parallel)}/2\Omega$ ) pour lesquelles  $E^{(\parallel)}$  est constant et  $E^{(\perp)} \propto \sigma^{-5/3}$ . On remarque que  $\sigma_{\text{dec}}^{(\parallel)}/2\Omega \simeq 0.25$  : la fréquence de décorrélation de la vitesse verticale est proportionnelle à  $\Omega$ . Il est intéressant enfin de remarquer une légère surreprésentation de la vitesse verticale pour  $\sigma_{\text{dec}}^{(\parallel)}/2\Omega < \sigma_* < 0.6$ . Cette observation est compatible avec l'anisotropie componentielle d'une onde plane d'inertie qui prédit  $A_C > 1$  pour  $\sigma_* < 1/\sqrt{3} \simeq 0.6$ . Le paramètre  $A_C$  pour une onde plane d'inertie

$$A_C = 2 \frac{1 - \sigma_*^2}{1 + \sigma_*^2}, \quad (4.19)$$

### 4.3. ANALYSE SPATIO-TEMPORELLE

---

est tracé en pointillés sur la figure 4.3.

Comme nous l'avons vu au chapitre 3, plus de 90 % de l'énergie est contenue dans le mode 2D à forte rotation ( $\Omega = 16$  tr/min). Nous avons également montré quantitativement la présence d'un transfert inverse dans le plan horizontal de l'énergie associée à la vitesse horizontale (chapitre 3) et l'émergence associée d'une dynamique lente (figure 4.2). Ces caractéristiques sont compatibles avec celles de la turbulence 2D. La loi de puissance  $\sigma^{-5/3}$  de  $E^{(\perp)}$  pourrait alors s'interpréter comme un spectre spatial d'énergie d'une turbulence 2D ( $\propto k_{\perp}^{-5/3}$ ) balayé aléatoirement par la vitesse à grande échelle (4.5). On remarquera que Yarom et Sharon [56] rapportent, eux, un spectre d'énergie horizontale moins pentu en  $\sigma^{-1.35 \pm 0.05}$  pour les fréquences inférieures à la fréquence de Coriolis  $2\Omega$  ainsi qu'une coupure très nette à la fréquence de Coriolis. Cependant, une analyse attentive de leurs données montre que leur spectre est également compatible avec une loi en  $\sigma^{-5/3}$  sur une décade aux basses fréquences. Yarom et Sharon observent en parallèle un spectre spatial d'énergie bien défini en  $k_{\perp}^{-5/3}$ , ce qui suggère qu'une partie de leur spectre temporel est, de même que dans notre étude, la trace d'un spectre spatial de turbulence 2D balayé par la vitesse à grande échelle.

En ce qui concerne la vitesse verticale, nous avons montré au chapitre 3 qu'elle se comportait aux grands taux de rotation comme un scalaire passif advecté par la vitesse horizontale. Dans cette limite, la fréquence de décorrélation de la vitesse verticale  $\sigma_{\perp, \text{dec}}^{(\parallel)}$  devrait être fixée par les effets de balayage stochastique par la vitesse horizontale, soit

$$\sigma_{\perp, \text{sw}}^{(\parallel)} \sim \frac{U_{\perp, \text{rms}}}{L_{\perp}^{(\parallel)}}, \quad (4.20)$$

avec  $U_{\perp, \text{rms}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \overline{u_x^2 + u_y^2} \right)^{1/2}$  et  $L_{\perp}^{(\parallel)}$  l'échelle intégrale de la composante verticale de la vitesse dans la direction horizontale définie au chapitre 3. On remarque que la fréquence  $\sigma_{\perp, \text{sw}}^{(\parallel)}$  constitue effectivement une bonne estimation de la fréquence de décorrélation  $\sigma_{\text{dec}}^{(\parallel)}$  aux plus grands taux de rotation  $\Omega = 8$  et  $16$  tr/min (voir figure 4.2). Cette estimation est cependant moins convaincante aux plus faibles taux de rotation pour lesquels la loi de puissance  $\sigma^{-5/3}$  de  $E^{(\perp)}(\sigma)$  est également moins nette. Il est cependant important de nuancer la pertinence d'une telle comparaison quantitative entre la fréquence  $\sigma_{\text{dec}}^{(\parallel)}$  et la  $\sigma_{\perp, \text{sw}}^{(\parallel)}$ , cette dernière étant le fruit d'une analyse dimensionnelle qui permet de prédire une loi d'échelle mais à une constante d'ordre 1 près.

## 4.3 Analyse spatio-temporelle

### 4.3.1 Distribution spatio-temporelle de l'énergie

On se focalise à présent sur la recherche d'ondes d'inertie en sein de l'écoulement turbulent qui sera effectuée à l'aide d'une caractérisation de la distribution de l'énergie entre échelles spatio-temporelles. La relation de dispersion de ces ondes étant anisotrope, on se concentrera

sur la signature de ces ondes sur l'anisotropie dimensionnelle de la distribution de l'énergie. On considère pour cela la corrélation en deux points de la transformée de Fourier temporelle du champ de vitesse

$$R(\mathbf{r}, \sigma) = \frac{2\pi}{\Delta T} \langle \hat{u}_i(\mathbf{x}, \sigma) \hat{u}_i^*(\mathbf{x} + \mathbf{r}, \sigma) + \text{c.c.} \rangle, \quad (4.21)$$

où  $\hat{u}_i$  est définie à l'équation (4.14) et  $*$  désigne le complexe conjugué. De même qu'à la section 4.2 nous appliquons la méthode de Welch afin d'améliorer la convergence de  $R$ . Dans les références [55, 56], la distribution d'énergie spatio-temporelle est évaluée sur la base des ondes planes c'est à dire à travers une transformée de Fourier spatio-temporelle. Dans notre cas, la taille des champs de vitesse est comparable voire inférieure à la taille des plus grandes structures de l'écoulement. Comme déjà discuté au chapitre 3, le spectre de Fourier spatial est alors pollué du fait de la taille finie du signal et constitue une mesure biaisée de la distribution d'énergie en échelle.

La corrélation  $R$  sonde la distribution d'énergie entre échelles orientées  $\mathbf{r}$  pour chaque fréquence  $\sigma$ . Sa moyenne angulaire peut s'interpréter comme l'énergie cumulée des structures d'échelles supérieures à  $|\mathbf{r}|$  associées à la fréquence  $\sigma$ . Sa limite en  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$  correspond au spectre temporel

$$R(\mathbf{r} = \mathbf{0}, \sigma) = E(\sigma). \quad (4.22)$$

Les cartes des corrélation normalisées  $R(\mathbf{r}, \sigma)/E(\sigma)$  sont tracées à la figure 4.4 pour  $\Omega = 0$  et 16 tr/min à quatre fréquences  $\sigma$ . En l'absence de rotation, les courbes de niveaux sont approximativement circulaires à toutes les échelles et fréquences, indiquant une bonne isotropie d'ensemble. On remarque que ces lignes de niveaux se concentrent à des échelles de plus en plus petites à mesure que la fréquence augmente : les hautes fréquences sont associées aux structures de petite échelle. Dans le cas en rotation, les lignes de niveau évoluent progressivement de quasi-verticales à petite fréquence (anisotropie de type "cigare") à plus horizontales (anisotropie de type "crêpe") pour  $\sigma_* \simeq 1$ . L'anisotropie de type cigare est compatible avec l'invariance verticale prédite par le théorème de Taylor-Proudman pour les fréquences très petites devant la fréquence de Coriolis. Cette invariance verticale correspond également à la limite  $\sigma \rightarrow 0$  de la relation de dispersion des ondes d'inertie. La tendance à l'anisotropie de type crêpe (invariance horizontale) observée à grande échelle horizontale  $r_\perp$  pour  $\sigma_* \simeq 1$  est également compatible avec la relation de dispersion des ondes d'inertie qui prédit un vecteur d'onde vertical  $|\mathbf{k}| \simeq |k_\parallel|$ .

### 4.3.2 Anisotropie dimensionnelle

Nous caractérisons à présent l'anisotropie dimensionnelle de notre turbulence en fonction de l'échelle horizontale  $r_\perp$  mais aussi de la fréquence  $\sigma$ . Pour chaque fréquence  $\sigma$  et échelle horizontale  $r_\perp$ , on détermine l'échelle verticale  $\ell_\parallel(r_\perp, \sigma)$  le long de l'axe vertical pour laquelle la corrélation est égale à celle évaluée en  $r_\perp \mathbf{e}_\perp$ , c'est à dire l'échelle telle que  $R(\ell_\parallel \mathbf{e}_\parallel, \sigma) = R(r_\perp \mathbf{e}_\perp, \sigma)$ . En pratique, l'échelle  $\ell_\parallel$  est déterminée comme le demi-axe vertical d'une ellipse

### 4.3. ANALYSE SPATIO-TEMPORELLE

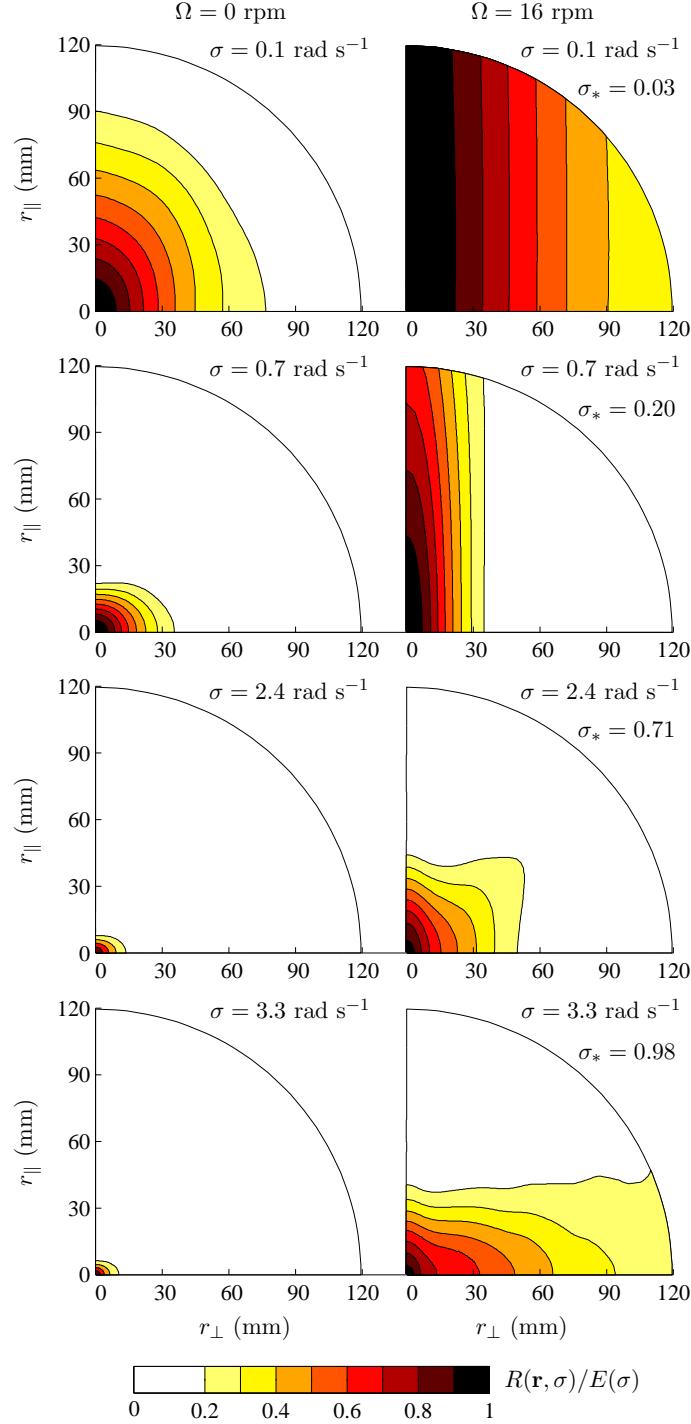


FIGURE 4.4 – Cartes de la corrélation en deux points normalisée  $R(\mathbf{r}, \sigma)/E(\sigma)$  dans le plan vertical pour  $\Omega = 0$  (gauche) et 16 tr/min (droite), à quatre fréquences angulaires  $\sigma = 0.1, 0.7, 2.4, 3.3 \text{ rad s}^{-1}$ . En rotation ( $\Omega = 16$  tr/min), les fréquences normalisées correspondantes sont  $\sigma_* = 0.03, 0.20, 0.71, 0.98$ . Les lignes de niveaux correspondant à  $R(\mathbf{r}, \sigma)/E(\sigma) < 0.2$  sont bruitées et ne sont pas tracées.



de demi-axe horizontal  $r_\perp$  ajustée à la courbe de niveau  $R(\mathbf{r}, \sigma) = R(r_\perp \mathbf{e}_\perp, \sigma)$ . Cette méthode permet de filtrer le bruit aux faibles valeurs de  $R$  mais aussi d'étendre l'analyse à des valeurs  $\ell_\parallel$  supérieures à la taille des champs de vitesse ( $\Delta z = 140$  mm). Les données pour lesquelles l'ajustement de l'ellipse possède un coefficient de corrélation inférieur à 0.9 ou telles que  $\ell_\parallel > 2\Delta z$  ne sont cependant pas suffisamment fiables et seront ignorées dans la suite de l'analyse. On définit finalement le facteur d'anisotropie dimensionnelle comme

$$A_D(r_\perp, \sigma) = \frac{r_\perp}{\ell_\parallel(r_\perp, \sigma)}. \quad (4.23)$$

Ce facteur est égal à 1 pour une turbulence isotrope, à 0 pour une turbulence 2D invariante verticalement et à l'infini pour une turbulence invariante horizontalement.

Si l'anisotropie  $A_D$  est gouvernée par la physique des ondes d'inertie pour  $\sigma_* < 1$ , on s'attend, conformément à la relation de dispersion de ces ondes (4.1), à ce qu'elle ne dépende pas de l'échelle considérée. Avant de passer aux résultats expérimentaux, nous allons dans un premier temps évaluer théoriquement le facteur d'anisotropie  $A_D$  pour une superposition d'ondes d'inertie linéaires.

### Anisotropie d'une collection d'ondes d'inertie

L'objectif de cette section est de calculer le paramètre d'anisotropie dimensionnelle  $A_D$  d'une assemblée d'ondes d'inertie linéaires dont les vecteurs d'onde sont distribués de manière axisymétrique. On peut dans un premier temps l'estimer dimensionnellement : en supposant que le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  puisse s'identifier à l'échelle  $\mathbf{r}$ , c'est à dire  $k_\perp \sim r_\perp^{-1}$  et  $k_\parallel \sim \ell_\parallel^{-1}$ , et en injectant ces relations dans la relation dispersion on obtient directement la relation  $A_D(\sigma_*) \simeq (\sigma_*^{-2} - 1)^{-1/2}$ . Une démonstration rigoureuse, développée par Basile Gallet, est détaillée ci-après. Elle aboutit à un résultat identique à un pré-facteur  $\sqrt{2}$  près.

On considère une assemblée d'ondes d'inertie dont les vecteurs d'ondes sont distribués de manière axisymétrique. La transformée de Fourier temporelle de ce champ de vitesse peut s'exprimer comme

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \sigma) = \int \mathbf{a}(\mathbf{k}, \sigma) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k}, \quad (4.24)$$

où  $\mathbf{a}(\mathbf{k}, \sigma)$  est la transformée de Fourier spatio-temporelle du champ de vitesse au vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  et à la fréquence  $\sigma$ . La corrélation en deux points de  $\hat{\mathbf{u}}$  s'écrit alors comme

$$\begin{aligned} R(\mathbf{r}, \sigma) &= \frac{2\pi}{\Delta T} \left\langle \iint \mathbf{a}(\mathbf{k}_1, \sigma) \cdot \mathbf{a}^*(\mathbf{k}_2, \sigma) e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - \mathbf{k}_2 \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{r}))} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 + \text{c.c.} \right\rangle_{\mathbf{x}}, \\ &= \frac{2\pi}{\Delta T} \int |\mathbf{a}(\mathbf{k}, \sigma)|^2 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{k}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

avec  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_\parallel r_\parallel + k_\perp r_\perp \cos \varphi$  en coordonnées cylindriques ( $\varphi$  est l'angle azimutal entre les vecteurs  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{r}$ ). On considère dans un premier temps que tous les vecteurs d'ondes ont la même

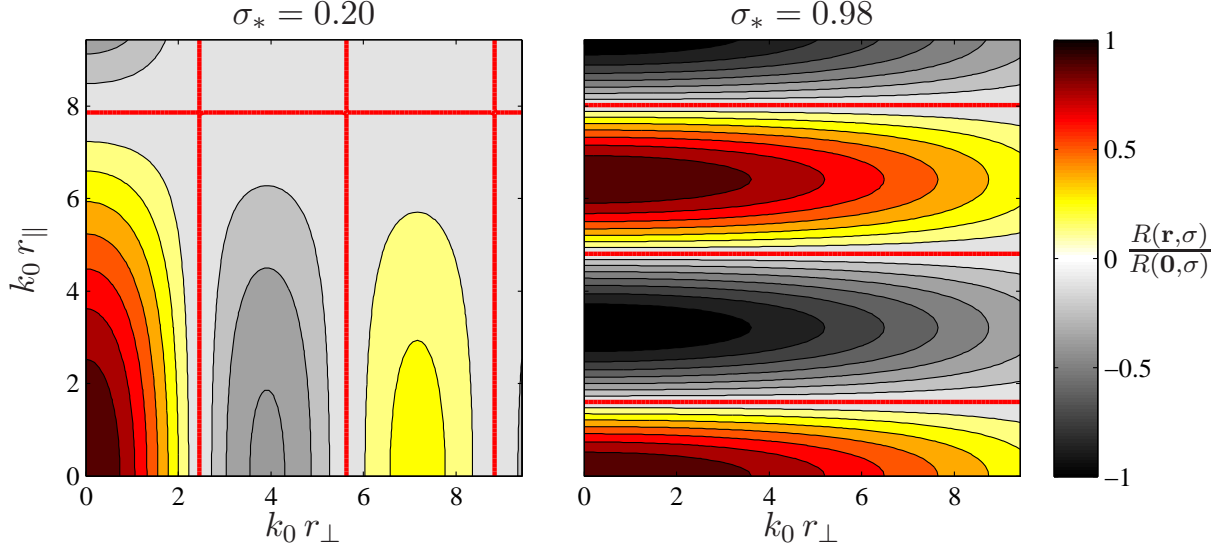


FIGURE 4.5 – Prédiction (4.28) pour la corrélation en deux points normalisée  $R(\mathbf{r}, \sigma)/R(\mathbf{0}, \sigma) = \cos(k_0 r_{\parallel} \sigma_*) J_0(k_0 r_{\perp} \sqrt{1 - \sigma_*})$  à deux fréquences normalisées  $\sigma_* = 0.20, 0.98$  pour une assemblée d’ondes dont les vecteurs d’onde sont distribués de manière axisymétrique et de norme  $k_0$ . Les lignes rouges représentent les points où la corrélation s’annule.

norme  $|\mathbf{k}| = k_0$ . Pour une fréquence  $\sigma_* = \sigma/2\Omega$  donnée, on a également le rapport  $k_{\parallel}/k_{\perp}$  qui est fixé par la relation de dispersion. De ce fait, l’argument du cosinus, qui se réécrit comme

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_0 r_{\parallel} \sigma_* + k_0 r_{\perp} \sqrt{1 - \sigma_*} \cos \varphi, \quad (4.26)$$

ne dépend plus que de  $\varphi$  à  $\sigma$  et  $\mathbf{r}$  fixés. Enfin, par axisymétrie statistique on a  $|\mathbf{a}(\mathbf{k}, \sigma)|^2$  indépendant de  $\varphi$  et non-nul uniquement pour  $k - k_0$  très petit si bien que la corrélation se simplifie comme

$$R(\mathbf{r}, \sigma) \simeq \frac{2\pi}{\Delta T} \int \int \left[ |\mathbf{a}(\mathbf{k}, \sigma)|^2 k_{\perp} \int_0^{2\pi} \cos(k_0 r_{\parallel} \sigma_* + k_0 r_{\perp} \sqrt{1 - \sigma_*} \cos \varphi) d\varphi \right] dk_{\perp} dk_{\parallel} \quad (4.27)$$

$$= G(\sigma) \cos(k_0 r_{\parallel} \sigma_*) J_0(k_0 r_{\perp} \sqrt{1 - \sigma_*}), \quad (4.28)$$

avec  $J_0$  la fonction de Bessel de première espèce d’indice 0. La figure 4.5 représente la prédiction (4.28) pour deux fréquences normalisées  $\sigma_* = 0.20$  et  $0.98$ . En se focalisant sur les échelles contenues dans la zone délimitée horizontalement par le premier zéro de la fonction de Bessel et verticalement par le premier zéro du cosinus, on observe des lignes de niveaux tout à fait similaires aux cartes expérimentales (figure 4.4) avec une anisotropie de type “cigare” pour  $\sigma_* = 0.20$  et de type “crêpe” pour  $\sigma_* = 0.98$ .

Pour une fréquence  $\sigma$  et une échelle horizontale  $r_{\perp}$  données, l’échelle verticale déterminant l’anisotropie dimensionnelle est définie à partir des lignes de niveaux  $R = \text{constante}$  dans le plan  $(r_{\perp}, r_{\parallel})$  qui connectent l’axe horizontal à l’axe vertical. Au vu de l’équation (4.28), une telle

connexion existe seulement si l'argument de la fonction de Bessel est inférieur à son premier zéro c'est à dire :

$$\sqrt{1 - \sigma_*^2} k_0 r_\perp < C_0, \quad (4.29)$$

avec  $J_0(C_0) = 0$  et  $C_0 \simeq 2.4$ . À partir de l'égalité  $R(r_\perp \mathbf{e}_\perp, \sigma) = R(\ell_\parallel \mathbf{e}_\parallel, \sigma)$ , on obtient

$$\ell_\parallel(r_\perp, \sigma_*) = \frac{\arccos \left[ J_0(\sqrt{1 - \sigma_*^2} k_0 r_\perp) \right]}{\sigma_* k_0}, \quad (4.30)$$

ce qui amène au facteur d'anisotropie

$$A_D(r_\perp, \sigma_*) = \frac{\sigma_* k_0 r_\perp}{\arccos \left[ J_0(\sqrt{1 - \sigma_*^2} k_0 r_\perp) \right]}. \quad (4.31)$$

Ce facteur d'anisotropie varie en pratique très peu avec le produit  $k_0 r_\perp$  : il est minimum pour une faible valeur de  $k_0 r_\perp \ll 1$  et vaut, après un développement limité,

$$A_D \simeq \sqrt{2} \frac{\sigma_*}{\sqrt{1 - \sigma_*^2}}. \quad (4.32)$$

Il est maximum pour  $k_0 r_\perp = C_0$  et vaut environ

$$A_D \simeq 1.53 \frac{\sigma_*}{\sqrt{1 - \sigma_*^2}}. \quad (4.33)$$

Les pré-facteurs des expressions (4.32) et (4.33) diffèrent de moins de 10%. Par la suite, nous considérerons que le facteur d'anisotropie d'une assemblée d'ondes d'inertie linéaires est décrit par l'expression (4.32) à une précision de 10% près.

Ce calcul a été réalisé pour une collection d'ondes de même longueur d'onde. Comme  $A_D$  varie cependant très faiblement avec  $k_0$ , on peut raisonnablement s'attendre à ce qu'une superposition réaliste d'ondes de nombres d'onde différents soient bien décrite par ce même facteur.

## Résultats

Nous allons regarder dans un premier temps  $A_D$  pour  $\Omega = 0$ , afin de vérifier la quasi isotropie de notre turbulence. Le facteur d'anisotropie  $A_D$  est tracé à la figure 4.6 en fonction de la fréquence à  $\Omega = 0$  et pour quatre échelles horizontales  $r_\perp = 9, 18, 26, 50$  mm. Aux fréquences inférieures à  $0.1 \text{ rad s}^{-1}$ , l'anisotropie dépend peu de  $\sigma$  et de  $r_\perp$  et se situe entre 0.6 et 0.7. Cette légère anisotropie de type "cigare" est une conséquence directe de la géométrie 2D du forçage. En revanche, à plus haute fréquence, le paramètre d'anisotropie croît avec  $\sigma$  et de manière inattendue, dépasse même légèrement l'unité indiquant une anisotropie de type "crêpe".

La figure 4.7 représente le facteur d'anisotropie  $A_D$  en fonction de la fréquence normalisée  $\sigma_*$  pour différents taux de rotation et pour les mêmes quatre échelles horizontales. Quelle que

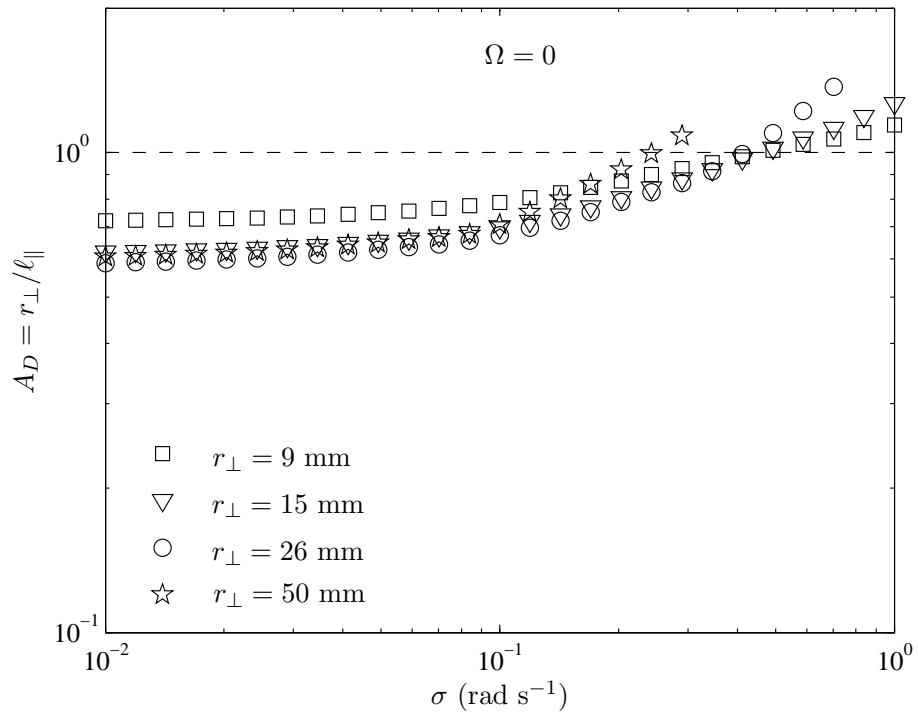


FIGURE 4.6 – Facteur d'anisotropie  $A_D$  en fonction de la fréquence  $\sigma$  à  $\Omega = 0$  et pour quatre échelles horizontales  $r_{\perp} = 9, 15, 26, 50 \text{ mm}$ .

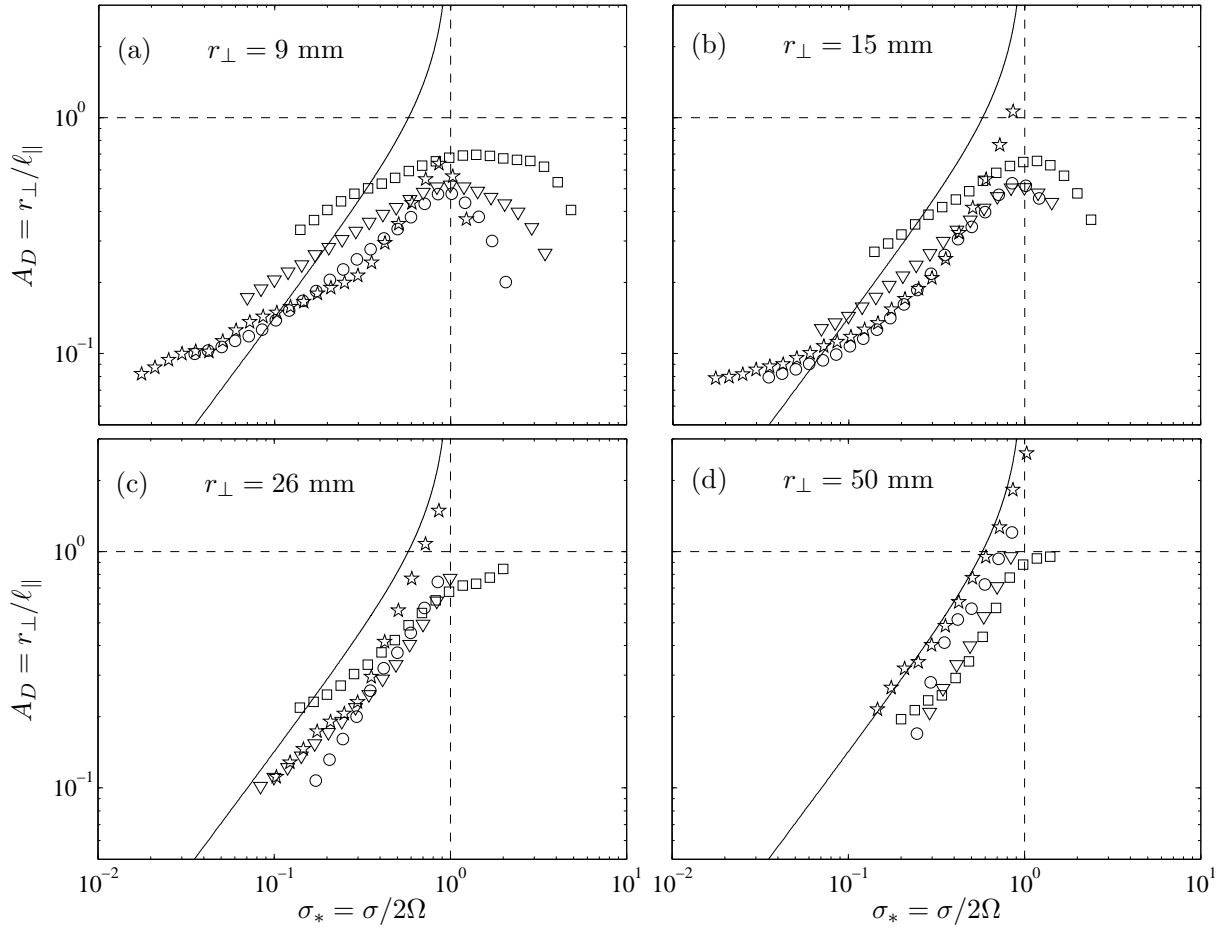


FIGURE 4.7 – Facteur d'anisotropie  $A_D$  en fonction de la fréquence normalisée  $\sigma_*$  à différents taux de rotation (mêmes symboles qu'aux figures 4.1, 4.2 et 4.3) et pour quatre échelles horizontales  $r_{\perp} = 9, 15, 26, 50$  mm. La courbe continue représente la prédiction pour une superposition d'ondes d'inertie de vecteurs d'onde distribués de manière axisymétrique (4.32).

### 4.3. ANALYSE SPATIO-TEMPORELLE

---

soit l'échelle horizontale et pour  $\sigma_* < 1$ ,  $A_D$  est une fonction croissante de  $\sigma_*$  ce qui confirme la tendance des fluctuations lentes à être plus allongées dans la direction verticale que les fluctuations rapides. On observe un bon accord entre les données et la prédiction pour des ondes d'inertie uniquement à grande échelle horizontale et pour les taux de rotation les plus élevés (figure 4.7 (d)). Au contraire, à petite échelle horizontale, la prédiction échoue, avec une évolution de  $A_D$  plus molle avec  $\sigma_*$  que la prédiction théorique (4.32).

#### 4.3.3 Effets de la viscosité et de balayage stochastique

Dans cette section, nous tentons de comprendre les raisons physiques aux écarts entre l'anisotropie de notre turbulence et la prédiction de l'anisotropie pour une assemblée d'ondes d'inertie.

##### Effet de la viscosité

Lorsque la viscosité est à l'œuvre, les ondes d'inertie sont toujours solutions de l'équation de Navier-Stokes avec toutefois un terme imaginaire qui s'ajoute à la relation de dispersion

$$\sigma = \pm \frac{k_{\parallel}}{|\mathbf{k}|} + i\nu|\mathbf{k}|^2. \quad (4.34)$$

Ce terme imaginaire a pour seul effet de multiplier la solution non visqueuse par le facteur  $e^{-\nu|\mathbf{k}|^2 t}$  traduisant l'amortissement des ondes qui est d'autant plus rapide que l'échelle est petite (nombre d'onde  $|\mathbf{k}|$  grand). Cet amortissement n'affecte cependant que l'amplitude de l'onde et ne modifie pas sa structure et donc son anisotropie. La viscosité n'est donc pas le bon candidat pour rendre compte de l'écart entre les données expérimentales de  $A_D$  et la prédiction.

##### Effet de balayage stochastique des ondes

L'effet de balayage des ondes (*sweeping* en anglais) correspond à l'advection des ondes par un écoulement à grande échelle. Une onde d'inertie transportée par un écoulement uniforme indépendant du temps  $\mathbf{U}$  subit un décalage Doppler de sa fréquence

$$\sigma = \sigma_i + \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}, \quad (4.35)$$

où  $\sigma_i$  est la fréquence intrinsèque de l'onde et  $\sigma$  la fréquence à laquelle l'onde est détectée dans le référentiel en rotation. Une différence importante apparaît entre l'équation (4.35) et la relation de dispersion classique des ondes d'inertie (4.1) avec ici une dépendance de la fréquence apparente  $\sigma$  avec la longueur d'onde, les petites échelles (grandes valeurs de  $|\mathbf{k}|$ ) étant les plus affectées par l'effet de balayage. Dans notre expérience, les grandes échelles énergétiques 2D peuvent être vues localement comme une telle vitesse de balayage qui évolue lentement et induit un "brouillage" de la fréquence des ondes détectées. On peut estimer un ordre de grandeur du décalage Doppler par  $k_{\perp} U_{\perp, \text{rms}}$  avec  $U_{\perp, \text{rms}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \overline{u_x^2 + u_y^2} \right)^{1/2}$  la vitesse r.m.s. horizontale.

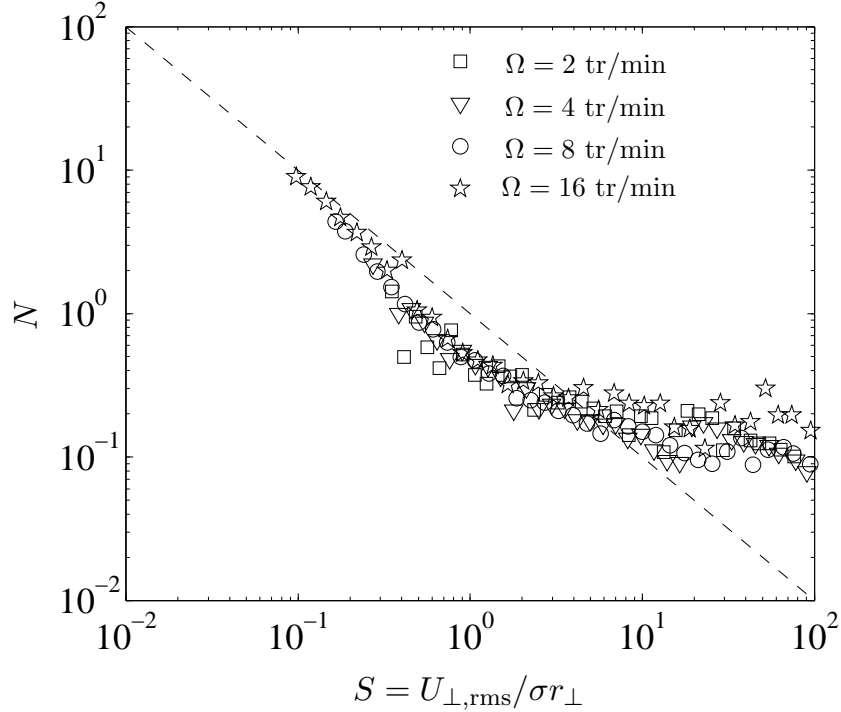


FIGURE 4.8 – Fréquence intrinsèque normalisée  $N$  en fonction du paramètre de balayage  $S$  pour toutes les échelles spatio-temporelles mesurées et tous les taux de rotation. La ligne tiretée  $N = 1/S$  montre la prédiction pour un ensemble d'ondes non balayées (4.32).

Pour un ensemble d'ondes d'inertie avec une distribution axisymétrique de vecteurs d'onde, on peut estimer la fréquence intrinsèque à partir de l'équation (4.32). En la substituant dans l'équation (4.35) et en estimant le décalage Doppler par analyse dimensionnelle on obtient

$$\sigma \simeq \frac{2\Omega}{\sqrt{1 + 2A_D^{-2}}} + \mathcal{C} \frac{U_{\perp,\text{rms}}}{r_{\perp}}, \quad (4.36)$$

où  $\mathcal{C}$  est une constante d'ordre 1. Cette loi prédit que le paramètre

$$N = \frac{2\Omega r_{\perp}}{U_{\perp,\text{rms}} \sqrt{1 + 2A_D^{-2}}} \quad (4.37)$$

doit être une fonction unique du paramètre de balayage  $S = U_{\perp,\text{rms}} / (\sigma r_{\perp})$ . Le paramètre  $N$  correspond à la fréquence intrinsèque des ondes d'inertie  $2\Omega / \sqrt{1 + 2A_D^{-2}}$  normalisée par l'inverse du temps d'advection  $r_{\perp} / U_{\perp,\text{rms}}$ . Le paramètre  $S$  représente lui la période apparente des ondes, normalisée par ce même temps d'advection.

La figure 4.8 représente  $N$  en fonction de  $S$  pour l'ensemble des valeurs étudiées du taux de rotation  $\Omega$ , de l'échelle horizontale  $r_{\perp}$  et de la fréquence  $\sigma$ . On remarque que toutes les données

### 4.3. ANALYSE SPATIO-TEMPORELLE

---

se rassemblent raisonnablement bien sur une courbe maîtresse  $N = f(S)$ , ce qui confirme que l'effet de balayage stochastique est bien responsable de l'écart à la prédiction de l'anisotropie  $A_D$  aux petites fréquences et/ou petites échelles. Le comportement attendu à petit paramètre de balayage  $S$  est  $N = 1/S$ , ce qui correspond à la prédiction (4.32) d'un ensemble axisymétrique d'ondes d'inertie non balayées. Quelques données, aux plus hautes fréquences et échelles, i.e. à petit  $S$ , sont en accord avec cette prédiction (tracé en ligne tiretée). Aux grands paramètres de balayage  $S$ , l'équation (4.35) prédit une asymptote horizontale  $N \simeq \mathcal{C}$  qui est aussi compatible avec les données.

La courbe maîtresse peut s'interpréter de la manière suivante : les ondes de hautes fréquences et de grandes échelles ( $S \ll 1$ ) pour lesquelles le décalage Doppler est négligeable devant la fréquence intrinsèque de l'onde sont très peu affectées par l'effet de balayage et suivent la relation de dispersion classique. À plus faibles fréquences  $\sigma$  et plus petites échelles ( $S \sim 1$ ), le signal détecté à la fréquence  $\sigma$  provient d'ondes de fréquence intrinsèque  $\sigma_i$  répartie sur une gamme de fréquence de largeur typique  $U_{\perp, \text{rms}}/r_{\perp}$ . L'anisotropie  $A_D$  mesurée à la fréquence  $\sigma$  résulte alors d'un ensemble d'ondes de fréquences intrinsèques différentes, chacune associée à une anisotropie différente. Enfin, la limite  $S \gg 1$  correspond aux fréquences très lentes devant l'inverse du temps d'advection. Dans cette limite, on détecte essentiellement des ondes de fréquences intrinsèques  $\sigma_i \sim U_{\perp, \text{rms}}/r_{\perp} \gg \sigma$  décalées par effet de balayage de telle manière qu'elles sont quasi-stationnaires dans le référentiel en rotation. C'est pourquoi l'anisotropie  $A_D$  (voir figure 4.7) ne tend pas vers 0 (état 2D invariant verticalement) aux faibles fréquences mais sature. On retrouve cet effet sur la figure 4.8 sous forme d'un plateau pour  $S \gg 1$ .

**Comparaison avec l'expérience de Yarom et Sharon** Dans leur expérience de turbulence forcée en rotation, Yarom et Sharon (2014) [56] observent l'émergence d'un mode 2D énergétique associé à un transfert inverse d'énergie. Malgré cela, ils ne détectent que des ondes d'inertie non balayées dans la gamme de nombres d'ondes supérieurs au nombre d'onde de forçage  $k_f = 0.7 < k < 3.3 \text{ rad cm}^{-1}$  et la gamme de fréquences  $\pi < \sigma < 2\Omega \text{ rad s}^{-1}$  avec  $1.6\pi < \Omega < 4\pi \text{ rad s}^{-1}$ . En estimant approximativement leur vitesse  $U_{\perp}$  à partir de leur spectre spatial d'énergie  $U_{\perp} \simeq (\int e(k) dk)^{1/2} / \sqrt{2} \simeq 3 \text{ cm s}^{-1}$ , on déduit le domaine qu'explore le paramètre de balayage  $0.02 < S < 0.5$ . La détection d'ondes non balayées associées à ces valeurs de  $S$  plus basses que les nôtres est compatible avec notre étude qui montre des ondes non balayées pour  $S \lesssim 0.3$ .

Il est intéressant de reformuler le paramètre de balayage à partir des caractéristiques de la composante 2D de l'écoulement (i.e.  $Ro$  et  $L_{\perp}$ )

$$S = Ro \frac{1}{\sigma_*} \frac{L_{\perp}}{r_{\perp}}. \quad (4.38)$$

En ne considérant que les paramètres où les ondes d'inerties sont attendues, i.e.  $\sigma_* \leq 1$  et  $r_{\perp} \leq r_f$ ,  $r_f$  étant l'échelle d'injection (la turbulence d'onde prédit une cascade directe d'énergie), on peut



fixer une borne inférieure au paramètre de balayage

$$S_{\min} = S(r_{\perp} = r_f, \sigma_* = 1) = Ro \frac{L_{\perp}}{r_f}. \quad (4.39)$$

La borne  $S_{\min}$  est uniquement fixée par les caractéristiques de la composante 2D de l'écoulement : elle est une fonction croissante du nombre de Rossby et de l'échelle intégrale horizontale. Dans l'expérience de Yarom et Sharon, la présence d'ondes non balayées est possible grâce à un nombre de Rossby et une échelle intégrale horizontale assez faibles ( $Ro = 0.002$ ,  $L_{\perp} \simeq 10 r_f$ ).

## 4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous montrons que l'anisotropie de l'énergie associée à une échelle horizontale  $r_{\perp}$  et à une fréquence temporelle  $\sigma$  est bien fixée par la relation de dispersion des ondes aux hautes fréquences et grandes échelles de l'écoulement. Les petites échelles et/ou basses fréquences sont elles sujettes à un fort balayage par le mode 2D à grande échelle. Ces observations sont compatibles avec les résultats numériques de Clark di Leoni *et al.* [55] qui identifient le temps de décorrélation associé aux petites échelles au temps de balayage.

Ces résultats ont de fortes implications sur les modèles de turbulence d'ondes d'inertie. La signature temporelle de la plupart des modes spatiaux ne suit en effet pas la relation de dispersion des ondes d'inertie. L'hypothèse d'une superposition d'ondes d'inertie quasi-linéaires de ces modèles est donc mise à défaut. L'effet de balayage par le mode 2D est de manière générale très difficile à prendre en compte dans les modèles notamment à cause des fortes variations spatiales et temporelles du mode 2D. Dans notre étude, nous avons supposé que le mode 2D était à plus grande échelle et à plus faible fréquence que les ondes. L'effet de balayage a alors été simplement modélisé comme un décalage Doppler.

Le dispositif de forçage utilisé dans cette expérience favorise, de part sa géométrie invariante avec l'axe de rotation, l'émergence d'un mode 2D ainsi que l'effet de balayage des ondes qui en résulte. L'accumulation d'énergie dans le mode 2D est néanmoins une propriété robuste de la turbulence en rotation quel que soit le forçage appliqué. L'étude récente d'Alexakis [51], à partir de simulations de turbulence en rotation forcées uniquement dans les modes 3D (Taylor-Green<sup>1</sup>), montre notamment une accumulation de l'énergie dans le mode 2D jusqu'à ce que son nombre de Rossby soit d'ordre 1. Un tel nombre de Rossby est associé à un fort effet de balayage avec  $S \geq Ro \frac{L_{\perp}}{r_f} > Ro \sim 1$ . La plupart des écoulements naturels affectés par la rotation sont effectivement associés à un nombre de Rossby de d'ordre 1 ou légèrement inférieur. Il semblerait donc que l'effet de balayage des ondes par le mode 2D soit une conséquence inévitable en turbulence en rotation. Néanmoins, l'expérience de turbulence stationnaire engendrée par un forçage 3D soumise à une rotation d'ensemble de Yarom et Sharon [56] nuance ces conclusions. Elle montre l'émergence d'un mode 2D énergétique mais, cette fois, associé à un nombre de

---

1. La force massique de Taylor-Green s'exprime comme  $\mathbf{f}_{TG} = f_0 \sin(k_{TG}x) \cos(k_{TG}y) \cos(k_{TG}z) \mathbf{e}_x - f_0 \cos(k_{TG}x) \sin(k_{TG}y) \cos(k_{TG}z) \mathbf{e}_y$  avec  $f_0$  l'amplitude de la force et  $\sqrt{3}k_{TG}$  le nombre d'onde de forçage.

#### 4.4. CONCLUSION

---

Rossby faible et à une échelle intégrale horizontale raisonnablement élevée (seulement dix fois plus grande que l'échelle d'injection). Il existe ainsi une gamme d'échelles et de fréquences associée à de faibles paramètres de balayage  $S$  et constituée d'une majorité d'ondes d'inertie non balayées.



## Chapitre 5

# Dissipation d'énergie en turbulence en rotation

### 5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la question fondamentale de l'effet de la rotation sur le taux de dissipation de l'énergie de la turbulence. Dans les écoulements turbulents tridimensionnels homogènes, le taux de dissipation d'énergie par unité de masse  $\varepsilon$  est fixé par les transferts directs d'énergie entre échelles dont l'intensité est elle-même imposée par les instabilités à grande échelle. L'ordre de grandeur du taux de dissipation  $\varepsilon$  est ainsi donné par

$$\varepsilon \sim U_f^2 / \tau_{tr,f}, \quad (5.1)$$

avec  $U_f$  la vitesse typique et  $\tau_{tr,f}$  le temps de transfert direct typique associés à l'échelle d'injection de l'énergie  $L_f$ . En l'absence de rotation, ce temps caractéristique de transfert est donné par le temps non-linéaire  $\tau_{nl} = L_f / U_f$ , ce qui conduit à la loi d'échelle de la turbulence 3D homogène et isotrope pour le taux de dissipation d'énergie

$$\varepsilon_{iso} \sim \frac{U_f^3}{L_f}. \quad (5.2)$$

En s'appuyant sur la décomposition du champ de vitesse sur la base complète des modes hélicoïdaux  $\mathbf{h}_{s\mathbf{k}}$  [20–23, 83], on peut décrire les transferts d'énergie entre échelles de la turbulence comme le fruit d'une superposition d'interactions à trois modes de vecteurs d'onde satisfaisant la condition de résonance spatiale  $\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{0}$ . Ces interactions sont décrites par une série d'équations qui dérivent de manière exacte de l'équation de Navier-Stokes et régissent l'évolution temporelle de l'amplitude  $A_{s\mathbf{k}}$  de chaque mode (voir section 1.3.3)

$$(\partial_t + \nu \mathbf{k}^2) A_{s\mathbf{k}}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}+\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{0}} \sum_{s_{\mathbf{p}}, s_{\mathbf{q}}} C_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}^{s_{\mathbf{k}}s_{\mathbf{p}}s_{\mathbf{q}}} A_{s_{\mathbf{p}}}^* A_{s_{\mathbf{q}}}^*, \quad (5.3)$$

où  $s_{\mathbf{k}}$  désigne le signe de l'hélicité du mode de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  et  $C_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}^{s_{\mathbf{k}}s_{\mathbf{p}}s_{\mathbf{q}}} = \frac{1}{2} [s_{\mathbf{q}}|\mathbf{q}| - s_{\mathbf{p}}|\mathbf{p}|] (\mathbf{h}_{s_{\mathbf{p}}}^* \times \mathbf{h}_{s_{\mathbf{q}}}^*) \cdot \mathbf{h}_{s_{\mathbf{k}}}^*$  les coefficients d'interaction [20–22]. On remarque que l'ordre de grandeur de  $C_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}^{s_{\mathbf{k}}s_{\mathbf{p}}s_{\mathbf{q}}}$  est de l'ordre de  $k$ , ce qui nous permet de déduire de l'équation (5.3) le temps de transfert typique à l'intérieur d'une triade donnée,  $1/C_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}^{s_{\mathbf{k}}s_{\mathbf{p}}s_{\mathbf{q}}} A_{s_{\mathbf{k}}} \sim 1/kU \sim \tau_{nl}$ .

**Dissipation sous rotation forte** La présence d'une rotation d'ensemble modifie profondément la structure et la dynamique de la turbulence. Dans la limite d'une rotation infinie ( $Ro \rightarrow 0$ ), l'écoulement peut être décrit comme la superposition d'un écoulement 2D invariant selon l'axe de rotation et d'un écoulement 3D découplé de l'écoulement 2D. Le taux de dissipation d'énergie au sein du mode 2D, qui n'est pas affecté par la rotation (voir section 1.4.2), est de l'ordre de

$$\varepsilon_{2D} \sim \nu \frac{U_f^2}{L_f^2} \sim \frac{1}{Re} \varepsilon_{iso}. \quad (5.4)$$

On note que l'ordre de grandeur de la dissipation dans une turbulence 2D est le même que pour un écoulement laminaire car la dissipation à l'échelle d'injection a une contribution dominante.

Les modes 3D sont quant à eux fortement affectés par la rotation : la force de Coriolis, a pour effet de faire osciller l'amplitude  $A_{s_{\mathbf{k}}}$  de chaque mode de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  à la fréquence  $\sigma_{s_{\mathbf{k}}} = -2s_{\mathbf{k}}\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$  (c'est la physique des ondes d'inertie), en plus de son évolution lente sous l'action des interactions non-linéaires avec les autres modes. Ce mécanisme suggère naturellement une réécriture du champ de vitesse en une somme d'ondes d'inertie d'amplitude  $B_{s_{\mathbf{k}}}(\mathbf{k}, t)$ . Les équations (5.3) se ramènent alors, sans approximation, aux équations d'évolution des amplitudes  $B_{s_{\mathbf{k}}}(\mathbf{k}, t)$  des ondes  $(\mathbf{k}, \sigma_{s_{\mathbf{k}}})$

$$(\partial_t + \nu \mathbf{k}^2) B_{s_{\mathbf{k}}}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}+\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{0}} \sum_{s_{\mathbf{p}}, s_{\mathbf{q}}} C_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}^{s_{\mathbf{k}}s_{\mathbf{p}}s_{\mathbf{q}}} B_{s_{\mathbf{p}}}^* B_{s_{\mathbf{q}}}^* e^{i2\Omega t (\frac{k_z}{k} + \frac{p_z}{p} + \frac{q_z}{q})}. \quad (5.5)$$

Les interactions à trois modes sont toujours pilotées par les non-linéarités avec les mêmes coefficients d'interaction  $C_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}^{s_{\mathbf{k}}s_{\mathbf{p}}s_{\mathbf{q}}}$  qu'en l'absence de rotation et opèrent ainsi toujours sur une échelle de temps  $\tau_{nl}$ . La force de Coriolis a cependant fait émerger un terme oscillant  $e^{i2\Omega t (\frac{k_z}{k} + \frac{p_z}{p} + \frac{q_z}{q})}$  qui a pour effet de brouiller les interactions dans les triades non-résonantes, i.e. telles que  $\frac{k_z}{k} + \frac{p_z}{p} + \frac{q_z}{q} \neq 0$ . Sous forte rotation, telle que  $\tau_{\Omega} = 1/\Omega \ll \tau_{nl}$ , les transferts à l'intérieur des triades non-résonantes ne peuvent plus opérer que sur une durée typique de l'ordre du temps de décorrélation  $\tau_{dec} \sim \tau_{\Omega}$  au-delà duquel un brouillage de phase est à l'œuvre. Cet effet de brouillage a pour conséquence de diminuer fortement l'intensité globale des transferts d'énergie dans la composante 3D par rapport au cas sans rotation<sup>1</sup>. Il a ainsi été proposé [94, 95] que le taux de transfert d'énergie entre échelles soit diminué d'un facteur  $\tau_{dec}/\tau_{nl} = \tau_{\Omega}/\tau_{nl}$  par rapport à la turbulence sans rotation. On en déduit une loi d'échelle pour le taux de dissipation de

1. Dans la limite d'une rotation infinie, l'effet de brouillage est tel que seules les triades exactement résonantes ( $\frac{k_z}{k} + \frac{p_z}{p} + \frac{q_z}{q} = 0$ ) peuvent échanger de l'énergie.

## 5.1. INTRODUCTION

---

l'énergie par unité de masse associé au mode 3D d'une turbulence soumise à une forte rotation

$$\varepsilon_{3D} \sim \frac{\tau_\Omega}{\tau_{nl}} \frac{U_f^2}{\tau_{nl}} = Ro \varepsilon_{iso}. \quad (5.6)$$

On peut remarquer que dans la limite  $Ro \gg 1$ , i.e. pour  $\tau_\Omega \gg \tau_{nl}$ , l'effet de brouillage devient négligeable et le temps de décorrélation  $\tau_{dec}$  s'identifie alors au temps non linéaire. On retrouve ainsi le taux de dissipation de la turbulence sans rotation  $\varepsilon_{iso}$ . Il est à noter que, sous une rotation modérée, même lorsque la rotation n'affecte pas la dissipation, cela ne signifie pas pour autant qu'elle n'ait aucun effet sur l'écoulement (anisotropie, asymétrie cyclone/anticyclone...).

Dans le cas général (avec ou sans rotation), on peut finalement décrire le taux de dissipation sous la forme

$$\varepsilon = G(Ro, Re) \varepsilon_{iso} \quad (5.7)$$

où  $G$  est un facteur multiplicatif sans dimension dépendant a priori des nombres de Reynolds et de Rossby. Dans un régime turbulent (i.e.  $Re \gg 1$ ),  $G$  est une constante pour  $Ro \gg Ro_c$ ,  $Ro_c$  étant un nombre de Rossby critique a priori d'ordre 1, ce qui conduit au résultat de la turbulence isotrope (5.2). En revanche il est proportionnel à  $Ro$ ,  $G(Ro) \propto Ro$ , dans un régime de forte rotation pour  $Ro \ll Ro_c$ . La question de l'effet de la rotation sur la loi d'échelle du taux de dissipation de la turbulence peut ainsi se ramener à l'étude de la dépendance de ce facteur  $G$  avec  $Ro$ .

**Effet du confinement** Cette vision se complexifie cependant lorsque l'on prend en compte l'effet du confinement vertical. Le confinement introduit des couches limites aux parois ainsi qu'une discrétisation, dans l'espace spectral, des vecteurs d'onde qui a pour effet d'autoriser le couplage entre le mode 2D et les modes 3D [30–32]. Le mode 2D peut alors devenir très énergétique et générer, à travers une cascade inverse d'énergie, de grandes échelles horizontales peu efficaces pour dissiper l'énergie. La contribution à la dissipation globale de la dissipation dans les couches limites sur les parois horizontales peut alors prendre le pas sur la dissipation dans le volume évoquée jusqu'à présent. En présence de rotation, ces couches limites sur les parois horizontales sont des couches limites d'Ekman qui, lorsqu'elles sont laminaires, ont une épaisseur typique  $\delta_{Ek} \simeq \sqrt{\nu/\Omega}$ . On peut en déduire un taux de dissipation volumique effectif, ramené à la hauteur de fluide  $H$ , de l'ordre de

$$\varepsilon_{Ek} \sim \nu \frac{U_f^2}{\delta_{Ek}^2} \frac{\delta_{Ek}}{H} = \frac{1}{\sqrt{Re Ro}} \frac{L_f}{H} \varepsilon_{iso}. \quad (5.8)$$

Il en résulte le facteur  $G(Ro, Re) \sim \frac{1}{\sqrt{Re Ro}} \frac{L_f}{H}$  qui décroît avec les nombres de Reynolds et de Rossby et qui dépend du rapport entre l'échelle de forçage la hauteur de fluide  $L_f/H$ . Cet ordre de grandeur a été obtenu sous l'hypothèse d'une couche limite laminaire. Lorsque les couches limites d'Ekman deviennent turbulentes, on s'attend naturellement à ce que leur contribution à

la dissipation globale soit plus élevée.

De par la complexité de la dynamique de la turbulence en rotation à nombre de Rossby fini, le comportement du taux de dissipation dans l'espace des paramètres  $(Re, Ro)$  n'est compris que de manière partielle et est ainsi encore sujet de vifs débats. Il se pose notamment la question de la possibilité d'observer, à nombre de Rossby fini, le taux de dissipation proportionnel au nombre de Rossby (5.6) prévu dans le régime asymptotique de forte rotation.

**Études de l'exposant de déclin** Cette question des lois d'échelle de la dissipation de l'énergie a principalement été abordée, aussi bien numériquement qu'expérimentalement, à travers des études du déclin d'une turbulence libre sous l'action de la rotation [84]. Dans cette situation, l'évolution de l'énergie cinétique moyenne  $U^2 = \langle \mathbf{u}^2 \rangle / 2$  peut-être décrite à partir de l'équation

$$\frac{dU^2}{dt} = -\varepsilon(t) = -G(Ro(t), Re(t)) \frac{U^3}{L_{\perp}(t)}, \quad (5.9)$$

avec  $L_{\perp}$  l'échelle intégrale horizontale. Il est à noter que le choix de la direction dans laquelle est évaluée la longueur caractéristique est arbitraire. Cependant, comme l'échelle intégrale verticale  $L_{\parallel}$  croît fortement avec la rotation, l'échelle horizontale  $L_{\perp}$  qui varie plus faiblement avec la rotation est la plus souvent choisie afin de faciliter la comparaison avec le cas sans rotation.

L'effet de la rotation sur la dissipation a ainsi été étudié numériquement [69, 73, 86, 87] et expérimentalement [34, 43, 68, 85] à travers l'exposant  $n$  de déclin de l'énergie cinétique moyenne  $U^2 \propto t^{-n}$ . Globalement, ces études mettent en évidence un exposant  $n$  diminué d'un facteur 1/2 par la rotation et compris entre 0.4 et 1. Cette diminution de l'exposant de déclin reflète l'affaiblissement attendu de la dissipation d'énergie turbulente par la rotation. L'étude expérimentale de Morize et Moisy [85] montre également l'effet important des couches limites d'Ekman qui dominent la dissipation d'énergie lorsque l'échelle intégrale verticale  $L_{\parallel}$ , qui croît pendant le déclin, atteint la hauteur de fluide.

La prédiction de l'exposant de déclin  $n$  dépend de la loi d'échelle utilisée pour le taux de dissipation (5.9), i.e. de la modélisation de  $G$ , mais nécessite également de modéliser l'évolution temporelle de l'échelle intégrale  $L_{\perp}(t)$ . L'évolution de cette échelle dépend a priori fortement des détails de l'écoulement tels que de la forme du spectre spatial à grande échelle ou du confinement du fluide. L'ensemble des hypothèses à considérer dans la modélisation de l'exposant de déclin de l'énergie fait de la mesure expérimentale ou numérique de celui-ci un test seulement indirect et sujet à caution des lois d'échelles pour le taux de dissipation adimensionné  $G$ . Il paraît donc intéressant, dans le but de compléter ces résultats, de mesurer directement le taux de dissipation d'énergie.

**Mesures directes du taux de dissipation** Cortet et Moisy [88], dans une expérience de turbulence en déclin et en rotation, mesurent directement  $\varepsilon$  à travers la dérivée temporelle de l'énergie horizontale. Ils observent un facteur  $G$  indépendant du nombre de Rossby malgré un effet notable de la rotation sur l'anisotropie de la distribution de l'énergie et un nombre de

## 5.2. DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL

---

Rossby de l'ordre de  $10^{-2}$  à la fin du déclin. Ils montrent par ailleurs que la rotation n'affecte pas les flux directs d'énergie entre échelles aux grandes échelles (qui fixent le taux de dissipation d'énergie dans une cascade directe), ce qui est cohérent avec l'observation de la loi d'échelle d'une turbulence 3D isotrope pour  $\varepsilon$ .

Dans une étude numérique récente de turbulence en déclin soumise à une rotation d'ensemble, Baqui et Davidson [89] montrent en revanche un taux de dissipation diminué d'un facteur  $\frac{L_{\perp}}{L_{\parallel}} \in [0.14, 1]$  par rapport à la loi d'échelle de la turbulence 3D sans rotation,  $\varepsilon \sim \frac{L_{\perp}}{L_{\parallel}} \varepsilon_{\text{iso}}$ . Leur écoulement développe par ailleurs une anisotropie  $\frac{L_{\parallel}}{L_{\perp}}$  importante et atteint un nombre de Rossby de l'ordre de  $10^{-1}$ , propriétés comparables à celles observées dans l'expérience de Cortet et Moisy [88]. Il est à noter que dans les expériences de Cortet et Moisy la dissipation dans d'éventuelles couches d'Ekman laminaires est négligeable devant celle mesurée : elle ne peut donc apparaître comme une interprétation à la différence avec les résultats de Baqui et Davidson. Ces résultats contradictoires sur la loi d'échelle du taux de dissipation d'énergie appelle ainsi à de nouvelles études.

Dans ce chapitre, nous considérons à nouveau cette question de la dissipation de l'énergie en turbulence en rotation. En étudiant une turbulence stationnaire et en mesurant le taux d'injection de l'énergie plutôt qu'un taux de déclin ou de transfert entre échelles, nous adoptons cependant une stratégie différente, dans l'espoir de voir émerger des résultats complémentaires. Nous présentons ainsi des résultats expérimentaux préliminaires d'une étude du taux de dissipation de l'énergie dans une turbulence stationnaire soumise à une rotation d'ensemble. L'écoulement est entretenu, dans le référentiel tournant, par une hélice entraînée à un taux de rotation  $\omega$  par un moteur. Ce système nous permet d'explorer aisément l'espace des paramètres  $(Re, Ro)$  en modifiant indépendamment  $\omega$  et  $\Omega$ . Il permet également d'accéder simplement au taux de dissipation de l'énergie dans tout le volume de fluide  $V$  à travers la mesure de la puissance consommée  $P$  par le moteur

$$P = \iiint_V \varepsilon d^3\mathbf{x}. \quad (5.10)$$

## 5.2 Dispositif expérimental

**Présentation générale** Un schéma du montage expérimental est représenté à la figure 5.1. Une cuve fermée de dimensions intérieures  $45 \times 45 \times 55 \text{ cm}^3$  remplie d'eau est installée sur la plateforme tournante "Gyroflow". On entretient une turbulence statistiquement stationnaire à l'aide d'une hélice de rayon  $R_f = 12 \text{ cm}$  et de hauteur  $H_f = 3.2 \text{ cm}$  constituée de 4 pales droites rectangulaires tournant à un taux de rotation constant  $\omega$  dans le référentiel en rotation. L'hélice est fixée sur un axe vertical traversant une des faces de la cuve, l'étanchéité étant assurée par un joint torique. L'axe de l'hélice est entraîné par un servo-moteur brushless capable de développer un couple de  $5 \text{ N m}$  et de tourner jusqu'à  $2500 \text{ tr/min}$  avec des fluctuations relatives  $\Delta\omega/\omega$  inférieures à  $0.1\%$ .



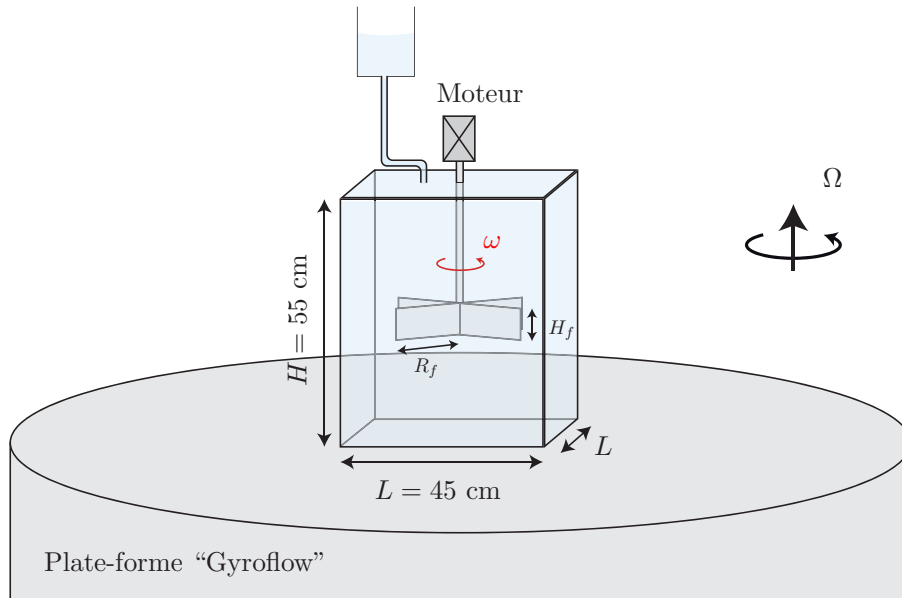


FIGURE 5.1 – Vue d’ensemble du dispositif expérimental. Une cuve fermée de base carrée ( $45 \times 45 \text{ cm}^2$ ) et de 55 cm de hauteur est remplie d’eau et posée sur la plateforme “Gyroflow”. Une hélice de rayon  $R_f = 12 \text{ cm}$  et de hauteur  $H_f = 3.2 \text{ cm}$  placée en son centre est mise en rotation par un servo-moteur brushless à un taux  $\omega$  constant et entretient une turbulence statistiquement stationnaire. Le couple développé par le moteur pour imposer une vitesse de rotation constante à l’hélice est mesuré à travers le courant consommé qui lui est proportionnel.

## 5.2. DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL

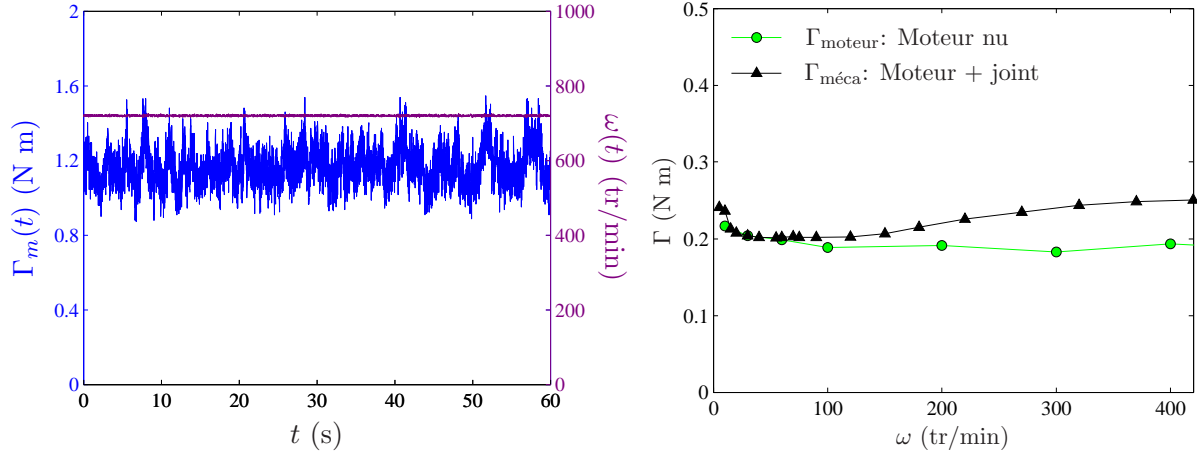


FIGURE 5.2 – À gauche : couple  $\Gamma_m \propto I$  et vitesse de rotation  $\omega$  en fonction du temps, mesurés en l’absence de rotation d’ensemble. À droite : couple non-hydrodynamique moyen en fonction du taux de rotation  $\omega$  du moteur avec et sans joint d’étanchéité.

**Mesure du couple** On mesure le couple  $\Gamma_m$  développé par le moteur, la puissance consommée étant égale à  $\Gamma_m \omega$ . Le couple  $\Gamma_m(t)$  est proportionnel au courant  $I(t)$  délivré par le variateur,  $\Gamma_m = \alpha I$ . La mesure consiste en l’acquisition de l’intensité  $I(t)$  sur un temps d’une minute à la fréquence de 165 Hz. Une série de temporelle typique du couple développé par le moteur est représentée dans la figure 5.2 (gauche). On remarque que le couple fluctue fortement autour de sa valeur moyenne. Ces fluctuations sont liées aux fluctuations hydrodynamiques de l’écoulement ainsi qu’aux fluctuations propres au moteur, au joint d’étanchéité et au bruit de mesure. Une étude de la distribution en fréquence des fluctuations de ce couple, qui nous renseignera sur la dynamique de l’écoulement généré, est en cours mais ne sera pas décrite dans ce manuscrit. Nous nous focaliserons ainsi sur l’objectif premier de cette expérience qui est la détermination du taux de dissipation moyen à travers la mesure du couple moyen  $\Gamma_m = \overline{\Gamma_m(t)}$ ,  $\overline{\cdot}$  représentant la moyenne temporelle.

Comme nous venons de l’évoquer, le couple  $\Gamma_m$  mesuré est en partie lié au couple hydrodynamique  $\Gamma$  mais aussi en partie aux couples non-hydrodynamiques liés aux pertes dans le moteur et au niveau du joint d’étanchéité. La figure 5.2 (droite) représente le couple non-hydrodynamique moyen en fonction de  $\omega$  avec et sans joint d’étanchéité. Le couple lié aux pertes dans le moteur  $\Gamma_{\text{moteur}}$  varie faiblement avec  $\omega$  et vaut environ  $0.20 \pm 0.02$  N m. La nature du joint d’étanchéité et l’alignement de l’axe de rotation avec celui-ci ont été optimisés afin de réduire au maximum les frottements tout en assurant l’étanchéité du système. La présence du joint n’implique ainsi qu’un couple additionnel de l’ordre de 0.05 N m au plus. Par la suite, nous évaluerons le couple hydrodynamique  $\Gamma$ , et donc la puissance dissipée associée  $P = \Gamma \omega$ , en retranchant le couple non-hydrodynamique  $\Gamma_{\text{méca}}(\omega)$  au couple mesuré  $\Gamma_m(\omega)$ . La précision sur la reproductibilité du couple non-hydrodynamique a été évaluée de l’ordre de  $\Delta \Gamma \simeq 0.02$  N m. Les couples hydrodynamiques  $\Gamma$  inférieurs à  $4\Delta \Gamma$  seront de ce fait écartés de l’analyse.

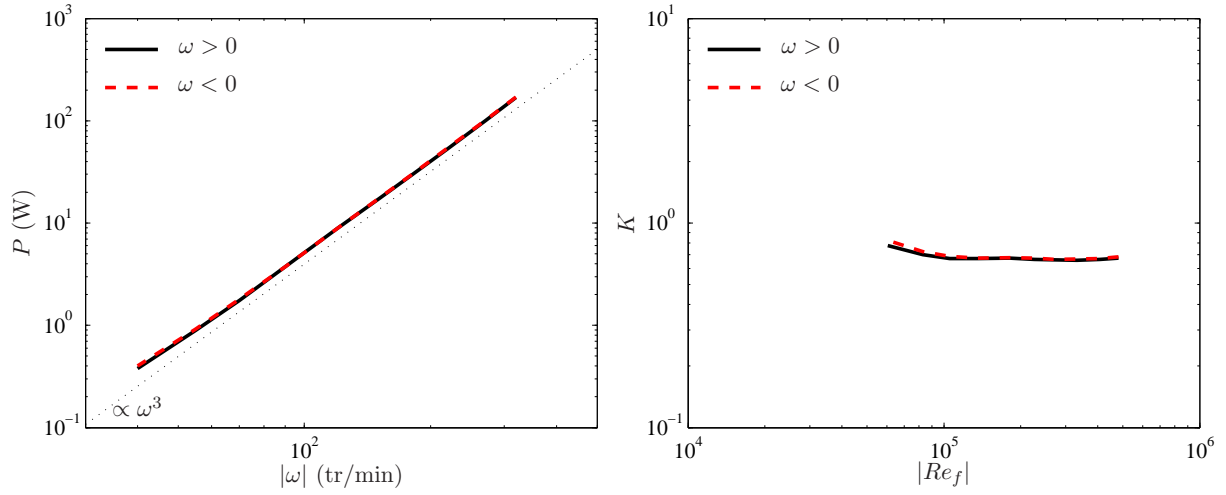


FIGURE 5.3 – À gauche, puissance dissipée  $P$  en fonction du taux de rotation  $\omega$  de l'hélice en l'absence de rotation d'ensemble. À droite, puissance normalisée  $K = \frac{P}{\rho R_f^4 H_f |\omega|^3}$  en fonction du nombre de Reynolds basé sur le mouvement de l'hélice  $Re_f = \omega R_f^2 / \nu$ , toujours en l'absence de rotation d'ensemble.

Nous faisons varier le taux de rotation d'ensemble  $\Omega$  de 0 à 30 tr/min et le taux de rotation de l'hélice de 40 à 420 tr/min, le taux minimal étant imposé par la précision de mesure  $4\Delta\Gamma$  du couple hydrodynamique et le taux maximal par le couple maximal du moteur (5 N m). Le nombre de Reynolds basé sur l'hélice

$$Re_f = \frac{U_f R_f}{\nu}, \quad (5.11)$$

avec  $U_f = \omega R_f$  la vitesse en bout de pale de l'hélice, varie ainsi entre  $6 \cdot 10^4$  et  $6 \cdot 10^5$ . Le nombre de Rossby basé sur l'hélice

$$Ro_f = \frac{\omega}{\Omega}, \quad (5.12)$$

varie quant à lui entre 1.3 et 650.

## 5.3 Résultats préliminaires

### 5.3.1 Puissance dissipée sans rotation d'ensemble $\Omega = 0$

La figure 5.3 (gauche) représente la puissance dissipée  $P = \Gamma\omega$  en l'absence de rotation. La courbe suit une loi de puissance en  $\omega^3$ , ce qui est en accord avec la loi d'échelle du taux de dissipation en turbulence 3D sans rotation  $\varepsilon_{\text{iso}} \sim U_f^3 / R_f = R_f^2 \omega^3$ . Par analyse dimensionnelle

### 5.3. RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

---

on peut exprimer la puissance dissipée dans l'écoulement comme

$$P = \underbrace{R_f^2 H_f}_{V_f} K \underbrace{\rho \varepsilon_{\text{iso}}}_{\varepsilon_V} = K R_f^4 H_f \rho |\omega|^3. \quad (5.13)$$

Le facteur sans dimension  $K$  est une constante pour un écoulement turbulent à grand nombre de Reynolds en l'absence de rotation. Il est l'analogie dans le cas inhomogène au préfacteur  $G$  présenté dans l'introduction : il constitue le préfacteur géométrique à la loi d'échelle du taux de dissipation volumique d'une turbulence 3D homogène et isotrope  $\varepsilon_V = \rho \varepsilon_{\text{iso}} = \rho |\omega|^3 R_f^2$  intégré sur le volume parcouru par l'hélice  $V_f \simeq R_f^2 H_f$ .  $K$  est ainsi l'équivalent pour un mouvement de rotation d'un coefficient de traînée pour un mouvement de translation.

La figure 5.3 (droite) représente ce facteur en fonction du nombre de Reynolds  $Re_f$ . On observe que  $K$  est effectivement constant sur une décade en nombre de Reynolds et vaut environ 0.67. On constate également une légère remontée de  $K$  pour  $Re_f < 10^5$ . Cette remontée correspond probablement à la transition entre les régimes laminaire, tel que  $K \propto Re_f^{-1}$ , et de turbulence pleinement développée : cette interprétation demande cependant à être confirmée à l'aide de mesure complémentaires à plus petit nombre de Reynolds (grâce à des mélanges eau-glycérol).

Dans la suite de cette étude il s'agira de déterminer comment est modifié ce facteur  $K$  par une rotation d'ensemble.

#### 5.3.2 Puissance dissipée en présence d'une rotation d'ensemble

La figure 5.4 représente la puissance hydrodynamique dissipée en fonction de  $\omega$  pour différents taux de rotation  $\Omega$ . Lorsque l'hélice tourne dans le sens cyclonique ( $\omega > 0$ ), i.e. dans le même sens que la plateforme, la puissance décroît à mesure que la rotation d'ensemble augmente à  $\omega$  fixé. On remarque également que la puissance dissipée évolue progressivement d'une loi de puissance en  $\omega^3$  en une loi de puissance en  $\omega^4$  qui est compatible avec la loi d'échelle du taux de dissipation à forte rotation  $RoU_f^3/R_f = R_f^2 \omega^4/\Omega$ . En revanche, dans le cas anticyclonique ( $\omega < 0$ ), la puissance est légèrement croissante avec  $\Omega$  pour  $\Omega \leq 10$  tr/min et se comporte globalement comme  $\omega^3$ . À plus grand taux de rotation d'ensemble et à faible  $\omega$ , la puissance dissipée se rapproche de la loi de puissance  $\omega^4$ . Elle est diminuée par rapport au cas non tournant à faible  $\omega$  et augmentée à plus grand  $\omega$ .

Afin de comparer plus finement ces résultats au cas non tournant, nous nous intéressons à présent à la puissance normalisée par la loi d'échelle en l'absence de rotation

$$K = \frac{P}{\rho R_f^4 H_f |\omega|^3}, \quad (5.14)$$

qui est représentée à la figure 5.5 (gauche) pour différents taux de rotation en fonction du nombre de Rossby  $Ro_f = \omega/\Omega$ . Les données relatives aux rotations cycloniques et anticycloniques se rassemblent chacune sur une courbe maîtresse, ce qui révèle l'indépendance de  $K$  avec le nombre

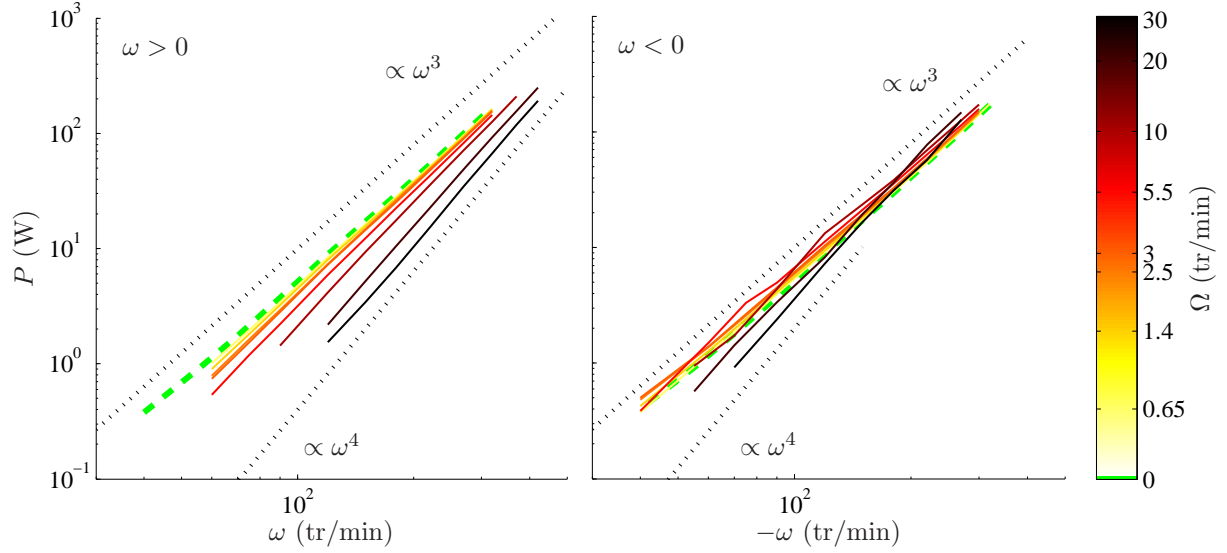


FIGURE 5.4 – Puissance dissipée  $P$  en fonction du taux de rotation de l'hélice  $\omega$  pour différents taux de rotation d'ensemble  $\Omega$ . À gauche, l'hélice tourne dans le sens cyclonique ( $\omega > 0$ ). À droite, l'hélice tourne dans le sens anticyclonique ( $\omega < 0$ ).

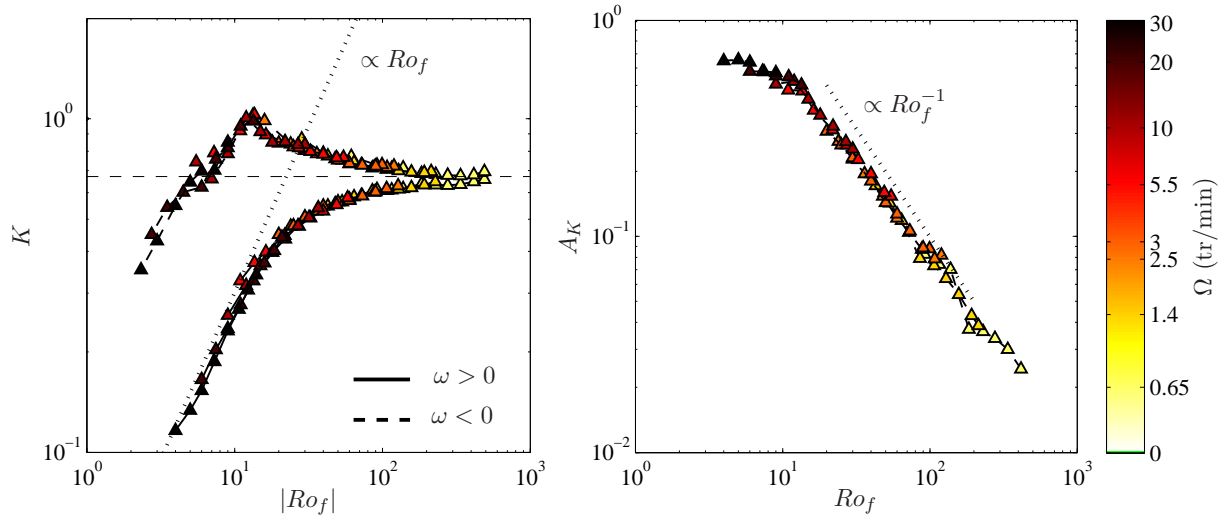


FIGURE 5.5 – À gauche : puissance normalisée  $K = \frac{P}{\rho R_f^4 H_f |\omega|^3}$  en fonction du nombre de Rossby basé sur l'hélice  $Ro_f = \omega/\Omega$ . La ligne horizontale tiretée représente la puissance adimensionnée en l'absence de rotation. À droite : paramètre d'asymétrie en fonction du nombre de Rossby basé sur l'hélice.

### 5.3. RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

---

de Reynolds : les expériences sont donc bien toujours dans des régimes de turbulence développée.

Lorsque l'hélice tourne dans le sens cyclonique ( $\omega > 0$ ), la puissance normalisée  $K$  est toujours inférieure à celle obtenue en l'absence de rotation. Elle est croissante avec le nombre de Rossby et tend vers la valeur constante de  $K$  observée en l'absence de rotation. À nombre de Rossby inférieur à 10, la puissance normalisée  $K$  est proportionnelle à  $Ro_f$ . Cette observation, même si elle est ici limitée à une demi-décade en nombre de Rossby à peine, constitue la première mise en évidence directe expérimentale de la loi d'échelle prédite pour le taux de dissipation de l'énergie d'une turbulence sous forte rotation. L'extension des mesures à de plus faibles nombres de Rossby est pour l'instant rendue impossible par la précision limitée de la mesure de couple qui exclue l'exploration de plus faibles valeurs de celui-ci. Notre observation de la loi d'échelle prévue pour le taux de dissipation dans une turbulence soumise à une rotation infiniment forte n'en constitue pas moins un résultat majeur dans le domaine de la turbulence en rotation, de part son caractère nouveau.

L'observabilité des deux lois asymptotiques  $\varepsilon \sim \varepsilon_{\text{iso}}$  et  $\varepsilon \propto Ro_f \varepsilon_{\text{iso}}$  nous permet d'extraire un nombre de Rossby critique  $Ro_c$  que l'on estime à d'environ 25.<sup>2</sup> Il est à noter cependant que la valeur de ce nombre de Rossby critique, qui est basé sur le forçage, dépend sans doute des caractéristiques de celui-ci. La paramétrisation de l'écoulement avec un nombre de Rossby basé sur l'écoulement, qui serait a priori plus faible que celui basé sur le forçage, fournirait sans doute une description plus universelle de la transition entre ces deux régimes de dissipation.

Lorsque l'hélice tourne dans le sens anticyclonique ( $\omega < 0$ ), la puissance normalisée est croissante avec  $|Ro_f|$  à faible  $|Ro_f|$  et devient brutalement décroissante pour  $|Ro_f| > 10$  pour finalement tendre vers la valeur de  $K$  en l'absence de rotation. Le pic de dissipation à  $Ro_f \sim -10$  est probablement associé au moment où l'instabilité centrifuge est la plus efficace pour déstabiliser les structures tourbillonnaires. Ce pic de dissipation est en pratique attendu lorsque la vorticité est de signe opposé et du même ordre de grandeur que la rotation d'ensemble (prévu par un critère de stabilité de Rayleigh généralisé [90, 91]). Un pic de dissipation de nature tout à fait similaire a également été rapport  dans l'écoulement de Taylor-Couette [90–93].

Lorsque l'hélice tourne dans le sens anticyclonique, la puissance dissipée est jusqu'à cinq fois supérieure à celle pour l'hélice tournant dans le sens cyclonique, ce qui révèle une asymétrie importante en fonction du sens de rotation de l'hélice par rapport à la rotation globale. On quantifie cette asymétrie à travers le paramètre

$$A_K(Ro_f) = \frac{K(-Ro_f) - K(Ro_f)}{K(-Ro_f) + K(Ro_f)}, \quad (5.15)$$

représenté à la figure 5.5 (droite). On remarque que, aux grands nombre de Rossby, pour lesquels la dissipation est plus proche du régime de turbulence sans rotation que du régime de forte rotation, le paramètre  $A_K$  suit une loi de puissance proche de  $Ro_f^{-1}$  sur une décade et demie en  $Ro_f$ . On constate également que cette asymétrie, même si elle est faible, est toujours visible

---

2. Le nombre de Rossby critique a été déterminé comme le nombre de Rossby où les deux lois asymptotiques se croisent.

à un nombre de Rossby élevé pour lequel l'hélice tourne 400 fois plus vite que la plateforme. Il est possible d'interpréter assez directement une telle loi de puissance en  $Ro^{-1}$  pour le paramètre d'asymétrie de la dissipation avec le signe de  $\Omega$ , à l'aide d'un développement asymptotique de l'équation de Navier-Stokes au premier ordre en  $1/Ro$  dans la limite  $Re \gg 1$ ,  $Ro \gg 1$ .

## 5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous présentons des mesures préliminaires du taux de dissipation de l'énergie dans une turbulence en rotation forcée par une hélice. Nous avons ainsi mis en évidence, pour la première fois expérimentalement, la loi d'échelle prédite pour le taux de dissipation de l'énergie d'une turbulence soumise à une forte rotation  $\varepsilon \sim Ro_f \varepsilon_{iso}$ .

Nous observons cette loi pour des nombres de Rossby inférieurs à un nombre de Rossby critique  $Ro_c$  de l'ordre de 10 au delà duquel on retrouve la loi d'échelle du taux de dissipation en l'absence de rotation. La valeur numérique précise de ce nombre de Rossby critique, qui est ici basé sur le forçage et dépend a priori de ses caractéristiques est cependant à considérer avec précaution. La mesure du champ de vitesse permettrait de paramétrer les régimes de l'écoulement à partir d'un nombre de Rossby basé sur l'écoulement, ce qui fournirait a priori une description plus universelle des régimes de dissipation observés.

Le précision actuelle sur la mesure du couple ne permet pas d'accéder à de plus faibles valeurs du nombre de Rossby, ce qui restreint la gamme observable du taux de dissipation proportionnel à  $Ro_f$ . L'utilisation d'un couplemètre rotatif de précision sur l'axe de rotation nous permettrait d'accroître la précision sur la mesure et ainsi d'étendre l'observation de cette loi d'échelle à une plus large gamme.

Enfin, une perspective intéressante à ce travail serait d'explorer le régime de dissipation dominée par les couches limites d'Ekman  $\varepsilon \sim (Re Ro)^{-1/2} (R_f/H) \varepsilon_{iso}$  à l'aide de mesures à plus petit nombre de Reynolds (grâce à des mélange eau-glycérol) et à confinement plus important (en diminuant la hauteur de cuve  $H$ ). Il s'agirait notamment de déterminer la frontière entre ce régime et les régimes dominés par la dissipation dans le volume, en termes du rapport entre l'échelle de forçage et la hauteur de fluide  $R_f/H$ , du nombre de Reynolds et du nombre de Rossby.

## Chapitre 6

# Conclusion générale et perspectives

L'objectif de cette thèse a été d'apporter des données expérimentales nouvelles destinées à caractériser finement certains effets de la rotation sur la dynamique des écoulements turbulents. Nous nous sommes intéressés à la turbulence soumise à une rotation modérée, qui représente le régime le plus pertinent pour décrire la plupart des écoulements naturels soumis à une rotation. Dans ce régime, les non-linéarités et la rotation sont fortement couplées et la structure de la turbulence est profondément modifiée par rapport à la turbulence tridimensionnelle sans rotation. La rotation favorise l'émergence d'un mode énergétique bidimensionnel invariant selon l'axe de rotation, qui est associé à une cascade inverse d'énergie entre les échelles du plan perpendiculaire à la rotation. Ce mode 2D est par ailleurs couplé non linéairement avec les modes 3D de l'écoulement qui sont eux a priori associés à une cascade directe d'énergie vers les petites échelles. Il se pose alors la question de l'intensité et de la direction globale des transferts d'énergie entre échelles dans une telle turbulence, question qui n'avait jusqu'à présent reçue que très peu de réponses expérimentales.

### Transferts d'énergie entre échelles

Nous avons ainsi, pour la première fois expérimentalement, mesuré directement les transferts horizontaux d'énergie entre échelles dans une turbulence en rotation et notamment distingué les transferts d'énergie horizontale de ceux de l'énergie verticale. En l'absence de rotation, on observe des transferts directs d'énergie, comme naturellement attendu pour une turbulence tridimensionnelle sans rotation. En revanche, en présence d'une forte rotation d'ensemble, l'énergie horizontale est transférée vers les grandes échelles tandis que l'énergie verticale est transférée vers les petites échelles. Ce comportement est similaire à celui d'une turbulence bidimensionnelle (mais à trois composantes). Dans une telle turbulence, la vitesse horizontale est en effet l'objet d'une cascade inverse d'énergie alors que la vitesse verticale se comporte comme un scalaire passif advecté par la vitesse horizontale et est ainsi transférée vers les petites échelles par le mécanisme d'étirement-repliement.

Cette structuration des transferts d'énergie rappelant celle d'une turbulence 2D ne signifie cependant pas pour autant que la turbulence soumise à une forte rotation s'identifie parfaite-



ment à celle-ci. Il est ainsi important de souligner que, dans nos expériences, même si le mode 2D domine l'écoulement d'un point de vue énergétique, la composante 3D conserve un rôle important. Cette dernière contribue en effet encore à au moins la moitié de la dissipation d'énergie dans nos expériences, ce qui distingue fortement notre écoulement quasi-2D en rotation d'une "vraie" turbulence 2D. À rotation intermédiaire, la dynamique de l'écoulement est plus complexe avec des transferts directs de l'énergie horizontale à petite échelle et inverses à grande échelle, l'échelle de renversement des transferts étant décroissante avec la rotation d'ensemble.

### **Injection d'énergie et turbulence inhomogène**

Dans un tel écoulement entretenu par des parois mobiles, le terme source d'énergie dans un volume de contrôle donné provient d'un transport spatial. Ce flux spatial est intrinsèquement lié aux inhomogénéités qui jouent ainsi un rôle capital dans les écoulements turbulents réels. L'injection effective d'énergie associée à ce flux est a priori large bande, tout simplement car l'écoulement est turbulent en dehors de la zone considérée, ce qui la distingue fortement de l'injection d'énergie localisée en échelles considérée en général dans les simulations numériques. Ces flux spatiaux et les flux entre échelles peuvent ainsi coexister, ce qui rend subtile l'interprétation de la conservation de l'énergie dans l'espace des échelles. Grâce à une analyse prenant en compte les inhomogénéités de la turbulence, nous avons pu distinguer proprement ces deux contributions et établir un bilan global de la conservation de l'énergie entre les échelles. Cette analyse révèle une injection d'énergie qui s'étale sur une gamme d'échelles d'autant plus large que la rotation d'ensemble est grande.

La différence entre l'injection "monochromatique" de l'énergie dans les simulations numériques et l'injection large bande dans les expériences et les écoulements naturels, que nous avons illustré dans nos travaux, a une conséquence majeure sur l'échelle de renversement de la cascade d'énergie. Dans nos expériences, l'échelle de renversement est sélectionnée par la dynamique de la turbulence elle-même. Au contraire, dans les simulations numériques homogènes, le renversement de la cascade d'énergie intervient par construction toujours à l'échelle d'injection : dans ce cas, seule l'intensité des cascades directes et inverses de part et d'autre de l'échelle d'injection est modifiée par la rotation.

### **Turbulence d'ondes d'inertie**

Nous nous sommes ensuite intéressé à tester dans quelle mesure des modèles de type "turbulence d'ondes d'inertie" pouvaient décrire notre écoulement turbulent en rotation. Ces modèles ont en pratique pour objet de décrire le cas limite d'une turbulence soumise à une rotation infinie (i.e. à nombre de Rossby tendant vers zéro) comme une assemblée d'ondes d'inertie en interaction faiblement non-linéaires. Bien que simplificateurs, l'intérêt majeur de ces modèles est qu'ils sont parmi les seuls à permettre une dérivation analytique des lois d'échelles pour les spectres spatiaux d'énergie ou pour les transferts d'énergie entre échelles. Il a été donc question d'évaluer dans quelle mesure ces modèles restent pertinents pour décrire les écoulements turbulents en rotation à nombre de Rossby fini.

---

Nous nous sommes en pratique intéressé à identifier le domaine d'échelles spatiales et temporelles pour lequel la turbulence est constituée d'une superposition d'ondes d'inertie linéaires, ce qui tient lieu d'hypothèse de travail pour les modèles de turbulence d'ondes d'inertie. Nous avons alors mis en évidence, à l'aide d'une analyse spatio-temporelle, la présence d'ondes à grande échelle et basse fréquence. Nous avons cependant constaté que la majorité des échelles spatio-temporelles énergétiques de l'écoulement ne respectent au contraire pas la relation de dispersion des ondes d'inertie, ce qui met en défaut l'hypothèse des modèles de turbulence d'ondes. Nous avons alors pu démontrer que la raison de cet écart est liée à la présence du mode 2D énergétique, qui a pour effet de balayer de manière stochastique les modes spatiaux 3D et brouille ainsi leur signature spatio-temporelle. L'émergence d'un mode 2D énergétique à grande échelle est une caractéristique majeure des écoulements turbulents en rotation. Celle-ci est pourtant ignorée des modèles de turbulence d'ondes d'inertie. L'influence, que nous avons illustrée par nos travaux, de ce mode 2D sur la physique des ondes présentes dans l'écoulement turbulent appellent ainsi à de nouveaux développements théoriques.

### **Caractéristiques du forçage et effet du confinement vertical**

Le dispositif de forçage employé dans cette expérience pour entretenir l'écoulement favorise, de par son invariance selon l'axe de rotation, l'émergence d'un mode 2D invariant verticalement. L'existence et la croissance avec la rotation de ce mode 2D est à l'origine de l'émergence de la cascade inverse de l'énergie horizontale et du brouillage spatio-temporel des ondes d'inertie 3D mis en évidence dans cette thèse. Une perspective intéressante à ce travail serait d'étudier, de manière systématique, l'influence des caractéristiques du forçage sur la croissance du mode 2D et ses conséquences sur les transferts d'énergie et l'effet de balayage. On pourrait par exemple ajouter entre les générateurs 2D existants un réseau de jets turbulents horizontaux soufflants et aspirants dirigés vers le centre de l'arène qui injecteraient de l'énergie dans des modes 3D de l'écoulement. Un tel système permettrait de contrôler la proportion d'énergie injectée dans les modes 2D et 3D.

Un autre aspect des écoulements tournants qu'il serait intéressant d'étudier plus en détails est l'effet du confinement vertical du fluide. Diminuer la hauteur de fluide revient à se rapprocher de manière géométrique du cas 2D. On peut alors se demander dans quelle mesure la direction et l'intensité des transferts d'énergie entre échelles dépend de la combinaison du nombre de Rossby et du confinement vertical. Ce type de travaux a déjà été mené à travers des simulations numériques de turbulence homogène. Développer une telle étude dans un écoulement expérimental, où l'échelle d'inversion de la cascade d'énergie par la rotation est le fruit de la dynamique de l'écoulement, enrichirait ces études numériques qui ne captent pas cet aspect de l'écoulement turbulent.

### **Loi d'échelle de la dissipation de l'énergie en turbulence en rotation**

Nous nous sommes ensuite penché sur la question fondamentale de l'effet de la rotation sur la loi d'échelle du taux de dissipation de l'énergie en turbulence. La question est notamment

de confronter à l'expérience la prédiction des modèles de turbulence d'ondes d'inertie de la loi d'échelle du taux de dissipation diminuée du nombre de Rossby  $Ro$  par rapport à la turbulence tridimensionnelle sans rotation  $\varepsilon \sim Ro \varepsilon_{iso}$ . Nous avons développé une nouvelle expérience dédiée à cet objectif : une turbulence statistiquement stationnaire est entretenue par la rotation d'une hélice dans un volume fermé lui-même en rotation. Nous mesurons alors la puissance dissipée par l'écoulement directement à travers la puissance consommée par le moteur pour maintenir la rotation de l'hélice.

Lorsque l'hélice tourne dans le sens cyclonique, i.e. dans le même sens que la plateforme, et pour de grandes valeurs du nombre de Rossby, on observe que la dissipation suit la loi d'échelle d'une turbulence 3D sans rotation. En revanche, à plus faibles valeurs du nombre de Rossby (qui restent tout de même relativement élevés  $Ro \sim 10$ ), la puissance dissipée est diminuée par rapport à celle en l'absence de rotation. Pour la première fois expérimentalement, nous avons mis en évidence que la puissance dissipée est compatible avec la loi d'échelle proportionnelle au nombre de Rossby  $Ro$  prédite pour une turbulence soumise à une forte rotation. Cette observation n'a cependant pu être réalisée qu'à peine sur une demi-décade de nombre de Rossby. Cette gamme limitée est liée à la précision de la mesure qui ne nous permet pas d'explorer de plus faibles valeurs de couple. L'installation d'un couplemètre rotatif de précision sur l'axe de rotation nous permettra à l'avenir d'explorer des valeurs plus faibles du nombre de Rossby et d'étendre probablement l'observation de cette loi d'échelle.

Lorsque l'hélice tourne dans le sens anticyclonique, la puissance dissipée est supérieure à celle du sens cyclonique (jusqu'à 5 fois supérieure), ce qui révèle une forte asymétrie en fonction du sens de rotation de l'hélice par rapport à la rotation globale. La puissance dissipée est une fonction croissante de  $Ro$  à faible nombre de Rossby puis devient brutalement décroissante au delà de  $Ro \sim 10$  et tend vers la loi d'échelle de la turbulence 3D sans rotation. Ce pic de dissipation observé dans le cas anticyclonique traduit en pratique le moment où l'instabilité centrifuge est la plus efficace à déstabiliser les structures tourbillonnaires, lorsque la vortacité est de signe opposé et du même ordre de grandeur que la rotation globale. Il a largement été rapporté dans des travaux expérimentaux dans l'écoulement de Taylor-Couette.

Comme nous l'avons déjà évoqué plus haut, la turbulence en rotation est sensible au confinement vertical et aux caractéristiques du forçage, notamment sa dimensionnalité (2D ou 3D) et sa componentialité (2C ou 3C). La versatilité de cette nouvelle expérience permettrait d'étudier aisément comment varie la puissance dissipée avec la hauteur de la cuve et avec les caractéristiques de l'hélice utilisée. Une perspective intéressante de ce travail consisterait à favoriser plus ou moins l'injection dans les modes tridimensionnels en jouant sur le rapport d'aspect de l'hélice et l'orientation de son axe de rotation. On peut enfin noter la mise en évidence récente, par des simulations numériques de turbulence en rotation, de l'importance de l'hélicité injectée dans la dynamique de la turbulence en rotation (qui est une quantité conservée dans la limite inviscide). Ces études montrent notamment qu'une hélicité nette non nulle favorise la bidimensionnalisation de l'écoulement et réduit la dissipation d'énergie. Une perspective intéressante serait d'évaluer, dans notre nouvelle expérience, l'influence de l'injection d'hélicité sur la dissipation d'énergie en vrillant plus ou moins l'hélice.

---

Pour conclure, cette thèse aura permis d'aborder quelques questions clefs de la turbulence en rotation. Mais elle aura surtout soulevé des interrogations nouvelles, qui appellent à des prolongations expérimentales dans le futur.



# Bibliographie

- [1] P.A. Davidson, *Turbulence in rotating, stratified and electrically conducting fluids* (Cambridge University Press, Cambridge, 2013).
- [2] P.A. Davidson, *Turbulence : An Introduction for Scientists and Engineers* (Oxford University Press, Oxford, 2004).
- [3] U. Frisch, *Turbulence - The Legacy of A. N. Kolmogorov* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- [4] A.S. Monin, A.M. Yaglom, *Statistical Fluid Mechanics, vol. 2* (MIT Press, Cambridge, 1975).
- [5] A.N. Kolmogorov, Dokl. Akad. Nauk SSSR, “The local structure of turbulence in incompressible viscous fluids at very large Reynolds numbers,” **30**(4), 299 (1941) ; “On the degeneration of isotropic turbulence in an incompressible viscous fluids,” **31**(6), 538 (1941) ; “Dissipation of energy in isotropic turbulence,” **32**(1) 19 (1941).
- [6] Y. Kaneda, Junya Yoshino, Takashi Ishihara “Examination of Kolmogorov’s 4/5 law by high-resolution direct numerical simulation data of turbulence,” J. Phys. Soc. Jpn., **77**, 064401 (2008).
- [7] F. Moisy, P. Tabeling, H. Willaime, “Kolmogorov Equation in a Fully Developed Turbulence Experiment,” Phys. Rev. Lett. **82**, 3994 (1999).
- [8] J. Salort, B. Chabaud, E. L  v  que and P.-E. Roche, *Energy cascade and the four-fifths law in superfluid turbulence*, EPL, **97**, 34006 (2012).
- [9] H. L. Grant, R. W. Stewart, A. Moilliet “Turbulence spectra from a tidal channel,” J. Fluid Mech. **12**, 241-268 (1962).
- [10] R. Kraichnan, “Inertial ranges in two-dimensional turbulence,” Phys. Fluids **10**, 1417 (1967).
- [11] E. Lindborg, “Can the atmospheric kinetic energy spectrum be explained by two-dimensional turbulence?,” J. Fluid Mech. **388**, 259 (1999).
- [12] D. Bernard, “Three-point velocity correlation functions in two-dimensional forced turbulence,” Phys. Rev. E **60**, 6184 (1999).

- [13] G. Boffetta, A. Celani, M. Vergassola, “Inverse cascade in two-dimensional turbulence : deviations from Gaussianity,” *Phys. Rev. E* **61**, 29 (2000).
- [14] P. Tabeling, “Two-dimensional turbulence : a physicist approach,” *Phys. Rep.* **362**, 1 (2002).
- [15] R.J. Hill, “Exact second-order structure function relationships,” *J. Fluid Mech.* **468**, 317 (2002).
- [16] H. Greenspan, *The theory of rotating fluids* (Cambridge University Press, Cambridge, 1976).
- [17] P. Sagaut, C. Cambon, *Homogeneous turbulence Dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2008).
- [18] J. Lighthill, *Waves in fluids* (Cambridge University Press, Cambridge, 1978).
- [19] G. Veronis, “The analogy between rotating and stratified fluids,” *Ann. Rev. Fluid Mech.* **2**, 37 (1970).
- [20] F. Waleffe, “The nature of triad interactions in homogeneous turbulence,” *Phys. Fluids A* **4**, 350 (1992).
- [21] F. Waleffe, “Inertial transfers in the helical decomposition,” *Phys. Fluids A* **5**, 677 (1993).
- [22] L.M. Smith, F. Waleffe, “Transfer of energy to two-dimensional large scales in forced, rotating three-dimensional turbulence,” *Phys. Fluids* **11**, 1608 (1999).
- [23] C. Cambon, L. Jacquin, “Spectral approach to non-isotropic turbulence subjected to rotation,” *J. Fluid Mech.* **202**, 295 (1989).
- [24] A. Newell, “Rossby wave packet interactions,” *J. Fluid Mech.* **35**, 255 (1969).
- [25] D. Benney, P. Saffman, “Nonlinear interaction of random wave in a dispersive medium,” *Proc. R. Soc. Lond. A* **289**, 301 (1966).
- [26] V. Zakharov, V. L’vov, G. Falkovich, *Wave Turbulence* (Springer, Berlin, 1992).
- [27] S. Galtier, “Weak inertial-wave turbulence theory,” *Phys. Rev. E* **68**, 015301 (2003).
- [28] C. Cambon, R. Rubinstein, F.S. Godeferd, “Advances in wave turbulence : rapidly rotating flows,” *New J. Phys.* **6**, 73 (2004).
- [29] L.S. Smith, Y. Lee, “On near resonances and symmetry breaking in forced rotating flows at moderate Rossby number,” *J. Fluid Mech.* **535**, 111 (2005).
- [30] L. Bourouiba, P. Bartello, “The intermediate Rossby number range and two-dimensional three-dimensional transfers in rotating decaying homogeneous turbulence,” *J. Fluid Mech.* **587**, 139 (2007).

- [31] L. Bourouiba, D.N. Straub, M.L. Waite, “Non-local energy transfers in rotating turbulence at intermediate Rossby number ,” *J. Fluid Mech.* **690**, 129 (2012).
- [32] J.F. Scott, “Wave turbulence in a rotating channel,” *J. Fluid Mech.* **741**, 316 (2014).
- [33] E.J. Hopfinger, F.K. Browand, Y. Gagne, “Turbulence and waves in a rotating tank,” *J. Fluid Mech.* **125**, 505 (1982).
- [34] L. Jacquin, O. Leuchter, C. Cambon, J. Mathieu, “Homogeneous turbulence in the presence of rotation,” *J. Fluid Mech.* **220**, 1 (1990).
- [35] C. Cambon, N.N. Mansour, F.S. Godeferd, “Energy transfer in rotating turbulence,” *J. Fluid Mech.* **337**, 303 (1997).
- [36] C. Lamriben, P.-P. Cortet, F. Moisy, “Direct measurements of anisotropic energy transfers in a rotating turbulence experiment,” *Phys. Rev. Lett.* **107**, 024503 (2011).
- [37] P.D. Mininni, D. Rosenberg, A. Pouquet, “Isotropization at small scales of rotating helically driven turbulence,” *J. Fluid Mech.* **699**, 263 (2012).
- [38] A. Delache, C. Cambon, F. Godeferd, “Scale by scale anisotropy in freely decaying rotating turbulence,” *Phys. Fluids* **26**, 025104 (2014).
- [39] K. Yoshimatsu, M. Midorikawa, Y. Kaneda, “Columnar eddy formation in freely decaying homogeneous rotating turbulence,” *J. Fluid Mech.* **677**, 154 (2011).
- [40] O. Zeman, “A note on the spectra and decay of rotating homogeneous turbulence,” *Phys. Fluids* **6**, 3221 (1994).
- [41] P. Bartello, O. Métais, M. Lesieur, “Coherent structures in rotating three-dimensional turbulence,” *J. Fluid Mech.* **273**, 1 (1994).
- [42] O. Praud, J. Sommeria, A.M. Fincham, “Decaying grid turbulence in a rotating stratified fluid,” *J. Fluid Mech.* **547**, 389 (2006).
- [43] F. Moisy, C. Morize, M. Rabaud, J. Sommeria, “Decay laws, anisotropy and cyclone-anticyclone asymmetry in decaying rotating turbulence,” *J. Fluid Mech.* **666**, 5 (2011).
- [44] L.M. Smith, J.R. Chasnov, F. Waleffe, “Crossover from Two- to Three-Dimensional Turbulence,” *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2467 (1996).
- [45] M. Hossain, “Reduction in the dimensionality of turbulence due to a strong rotation,” *Phys. Fluids* **6**, 1077 (1994).
- [46] P.K. Yeung, Y. Zhou, “Numerical study of rotating turbulence with external forcing,” *Phys. Fluids* **10**, 2895 (1998).



- [47] Q. Chen, S. Chen, G. Eyink, D. Holm, “Resonant interactions in rotating homogeneous three-dimensional turbulence,” *J. Fluid Mech.* **542**, 139 (2005).
- [48] P.D. Mininni, A. Alexakis, A. Pouquet, “Scale interactions and scaling laws in rotating flows at moderate Rossby numbers and large Reynolds numbers,” *Phys. Fluids* **21**, 015108 (2009).
- [49] A. Sen, P.D. Mininni, D. Rosenberg, A. Pouquet, “Anisotropy and nonuniversality in scaling laws of the large-scale energy spectrum in rotating turbulence,” *Phys. Rev. E* **86**, 036319 (2012).
- [50] E. Deusebio, G. Boffetta, E. Lindborg, S. Musacchio, “Dimensional transition in rotating turbulence,” *Phys. Rev. E* **90**, 023005 (2014).
- [51] A. Alexakis, “Rotating Taylor-Green flow,” *J. Fluid Mech.* **769**, 46 (2015).
- [52] C.N. Baroud, B.B. Plapp, Z.-S. She, H.L. Swinney, “Anomalous Self-Similarity in a Turbulent Rapidly Rotating Fluid,” *Phys. Rev. Lett.* **88**, 114501 (2002).
- [53] C. Morize, F. Moisy, M. Rabaud, “Decaying grid-generated turbulence in a rotating tank,” *Phys. Fluids* **17**, 095105 (2005).
- [54] E. Yarom, Y. Vardi, E. Sharon, “Experimental quantification of inverse energy cascade in deep rotating turbulence,” *Phys. Fluids* **25**, 085105 (2013).
- [55] P.C. di Leoni, P.J. Cobelli, P.D. Mininni, P. Dmitruk et W.J. Matthaeus, “Quantification of the strength of inertial waves in a rotating turbulent flow,” *Phys. Fluids* **26** (3), 035106 (2014).
- [56] E. Yarom et E. Sharon, “Experimental observation of steady inertial wave turbulence in deep rotating flows,” *Nature Physics* **10**, 510-514 (2014).
- [57] L.J.A. van Bokhoven, H.J.H. Clercx, G.J.F. van Heijst and R.R. Trieling, “Experiments on rapidly rotating turbulent flows,” *Phys. Fluids* **21**, 096601 (2009).
- [58] P.D. Mininni, A. Pouquet, “Rotating helical turbulence. I. Global evolution and spectral behavior,” *Phys. Fluids* **22**, 035105 (2010).
- [59] P.D. Mininni, A. Pouquet, “Rotating helical turbulence. II. Intermittency, scale invariance, and structures,” *Phys. Fluids* **22**, 035106 (2010).
- [60] C. Lamriben, *Transferts anisotropes d’énergie en turbulence en rotation et excitation de modes d’inertie*, Thèse de doctorat de l’université Paris Sud. (2012)
- [61] P. Billant, J.-M. Chomaz, “Experimental evidence for a new instability of a vertical columnar vortex pair in a strongly stratified fluid,” *J. Fluid Mech.* **418**, 167 (2000).

- [62] P. Augier, P. Billant, M.E. Negretti, J.-M. Chomaz, “Experimental study of stratified turbulence forced with columnar dipoles,” *Phys. Fluids*. **26**, 046603 (2014).
- [63] J. Fontane, *Étude expérimentale des instabilités 3D d’une paire de tourbillons en milieu tournant*, Stage de DEA et de fin d’étude de l’ENSICA. (2002)
- [64] B. Gallet, A. Campagne, P.-P. Cortet, F. Moisy, “Scale-dependent cyclone-anticyclone asymmetry in a forced rotating turbulence experiment,” *Phys. Fluids* **26**, 035108 (2014).
- [65] J.L. Lumley, *Some problems connected with the motion of small particles in turbulent fluid*, PhD Thesis, The John Hopkins University, Baltimore. (1957)
- [66] R.A. Wigeland, H.M. Nagib, “Effects of rotation on decay of turbulence,” *Bull. Am. Phys. Soc.* **23**(8), 998 (1978).
- [67] S.C. Dickinson and R.R. Long, “Oscillating-grid turbulence including effects of rotation,” *J. Fluid Mech.* **126**, 315 (1983).
- [68] P.J. Staplehurst, P.A. Davidson and S.B. Dalziel, “Structure formation in homogeneous freely decaying rotating turbulence,” *J. Fluid Mech.* **598**, 81 (2008).
- [69] L.J.A. van Bokhoven, C. Cambon, L. Liechtenstein, F.S. Godeferd, H.J.H. Clercx, “Refined vorticity statistics of decaying rotating three-dimensional turbulence,” *J. Turb.* **9**, 1 (2008).
- [70] A. Pouquet, A. Sen, D. Rosenberg, P.D. Mininni, J. Baerenzung, “Inverse cascades in turbulence and the case of rotating flows,” *Phys. Scripta* **T155**, 014032 (2013).
- [71] P. Augier, S. Galtier, P. Billant, “Kolmogorov laws for stratified turbulence,” *J. Fluid Mech.* **709**, 659 (2012).
- [72] S. Banerjee, S. Galtier, “Exact Relation with Two-point Correlation Functions and Phenomenological Approach for Compressible Magnetohydrodynamic Turbulence,” *Phys. Rev. E* **87**(1), 013019 (2013).
- [73] K.D. Squires, J.R. Chasnov, N.N. Mansour, C. Cambon, “The asymptotic state of rotating turbulence at high Reynolds number,” *AGARD-CP-551*, 4.1 (1994).
- [74] A.M. Yaglom, “On the local structure of a temperature field in a turbulent flow,” *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **69**, 743 (1949).
- [75] P. C. Valente, J. C. Vassilicos, “The non-equilibrium region of grid-generated decaying turbulence,” *J. Fluid Mech.* **744**, 5 (2014).
- [76] A.A. Townsend, *The structure of turbulent shear flow* (Cambridge University Press, Cambridge, 1968).

- [77] R. Kraichnan, "The structure of isotropic turbulence t very high Reynolds numbers," J. Fluid Mech. **05**, 04 (1959).
- [78] S. A. Orszag, G. S. Patterson, "Numerical simulation of three-dimensional homogeneous isotropic turbulence," Phys. Rev. Lett. **28**, 76 (1972).
- [79] H. Tennekes, "Eulerian and lagrangian time microscales in isotropic turbulence," J. Fluid Mech. **67**, 03 (1975).
- [80] T. Sanada, V. Shanmugasundaran, "Random sweeping effect in isotropic numerical turbulence," Phys. Fluids **4**, 1245 (1992).
- [81] P. D. Welch "The use of fast Fourier transform for the estimation of power spectra : a method based on time averaging over short, modified periodograms," IEEE trans. audio electroacoustics **15**, 70 (1967).
- [82] Y. Morinishi, K. Nakabayashi et S. Q. Ren, "Dynamics of anisotropy on decaying homogeneous turbulence subjected to system rotation," Phys. Fluids **13** (10), 2912 (2001).
- [83] J.R. Herring, "Approach of axisymmetric turbulence to isotropy," Phys. Fluids **17**, 859 (1974).
- [84] P.A. Davidson, "On the decay of Saffman turbulence subject to rotation, stratification or an imposed magnetic field," J. Fluid Mech. **663**, 268 (2010).
- [85] C. Morize, F. Moisy, "On the energy decay of rotating turbulence in confined geometry," Phys. Fluids **18**, 065107 (2006).
- [86] T. Teitelbaum, P.D. Mininni, "The decay of turbulence in rotating flows," Phys. Fluids **23**, 3592325 (2011).
- [87] M. Thiele, W.-C. Muller, "Structure and decay of rotating homogeneous turbulence," J. Fluid Mech. **637**, 425 (2009).
- [88] P.-P. Cortet, *Hydrodynamique en rotation et instabilité dynamique du pelage des adhésifs*, Habilitation à diriger la recherche, Université Paris Sud. (2015)
- [89] Y. B. Baqui, P. A. Davidson "A phenomenological theory of rotating turbulence," Phys. Fluids **27**, 025107 (2015).
- [90] R. C. Kloorsterziel, G. J. F. Van Heijst, "An experimental study of unstable barotropic vortices in a rotating fluid," J. Fluid Mech. **223**, 1 (1991).
- [91] I. Mutabazi, C. Normand, J. E. Wesfreid "Gap size effects on centrifugally and rotationally driven instabilities," Phys. Fluids **4**, 1199 (1992).

- [92] Dennis P.M. Van Gils, Sander G. Huisman, Gert-Wim Bruggert, Chao Sun, Detlef Lohse, “Torque scaling in turbulent Taylor-Couette flow with co- and counterrotating cylinders,” *Phys. Rev. Lett.* **106**, 024502 (2011).
- [93] Dennis P.M. Van Gils, Sander G. Huisman, Siegfried Grossmann, Chao Sun, Detlef Lohse, “Optimal Taylor-Couette turbulence,” *J. Fluid Mech.* **706**, 118 (2012).
- [94] R. H. Kraichnan, “Inertial-range spectrum of hydromagnetic turbulence,” *Phys. Fluids* **8**, 1385 (1965).
- [95] Y. Zhou, “A phenomenological treatment of rotating turbulence,” *Phys. Fluids* **7**, 2092 (1995).